Investigación operativa

Ambito empresarial

Juan Alberto Ávalos Reyes
Patricia Mercedes Cepeda Silva

ESPOCH
2024

INVESTIGACIÓN OPERATIVA
Ámbito empresarial

INVESTIGACIÓN OPERATIVA
Ámbito empresarial

Juan Alberto Avalos Reyes
Patricia Mercedes Cepeda Silva

Decanato
de Publicaciones

espoch

Investigación Operativa Ámbito Empresarial

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½
Instituto de Investigaciones
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (03) 2 998-200
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego
(*peer review*)

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Publicado en Ecuador

CDU: 658
Investigación Operativa Ámbito Empresarial
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Decanato de Publicaciones, Año 2024
176 pp. 17 x 24 cm
ISBN: 978-9942-45-154-5
1. Administración de empresas

DEDICATORIA

A todos aquellos que asumen el reto
de querer mejorar este mundo en particular.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

PRÓLOGO

La dinámica nacional e internacional obliga a cada uno de los países a desarrollar investigación de sus operaciones en el ámbito científico, productivo, educativo y financiero; como requisito fundamental para adaptarse al movimiento productivo internacional de los países desarrollados, de ahí la necesidad y oportunidad de contribuir con estudiantes, docentes y empresarios de nuestro país, con conocimientos sobre la materia que se imparte y practica en el cotidiano desarrollo de las actividades.

En la presente obra se considera necesario dar a conocer los mecanismos de aprendizaje de la investigación operativa y su dirección como objetivo fundamental de los autores: más aún cuando consideramos que la investigación operativa es una herramienta necesaria para administradores, hombres de empresa, estudiantes y maestros comprometidos con el desarrollo de los aparatos productivos del país.

El trabajo, producto de la experiencia y profundización científica, espera satisfacer las necesidades de los actores del desarrollo socioeconómico y la investigación.

Los Autores.

INTRODUCCIÓN

La Investigación Operativa, permite conocer aspectos relacionados con la productividad de las empresas. Se constituye en una herramienta de modelación, análisis, reflexión y de toma de decisiones, que en el que hacer actual de la empresa es necesario, no solo para responder a los cambios y a las demandas que les impone el entorno, sino también para proponer y concretar el futuro de la organización con miras a una gran participación en el mercado.

En una empresa la Investigación Operativa permite desarrollar el sistema de gestión integral en producción, economía, y recurso humano, a través del reconocimiento y aprovechamiento de los recursos existentes; esto encierra un enfoque de superación de expectativas y el énfasis en los aspectos de los procesos productivos, y todas aquellas actividades donde participen los recursos, los mismos que son generalmente limitados.

El comportamiento, actitudes y la forma de ver la investigación operacional permite determinar la efectividad con que se desempeña la empresa, demuestra su efectividad y cumple el rol para el que fue creada, de ahí la necesidad de determinar un conjunto de variables que nos den la relación perfecta entre el problema y su solución.

CAPÍTULO I
1. INVESTIGACIÓN OPERATIVA

1.1 LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

El término Investigación Operativa muy a menudo está ligado casi exclusivamente con aplicación de técnicas matemáticas para representar por medio de un modelo problemas que requieren de decisión, donde el principal actor es el ser humano.

La Investigación Operativa se puede considerar tanto una ciencia como un arte cuando se utiliza como técnica para resolver problemas. Desde el punto de vista científico, proporciona técnicas y algoritmos matemáticos para abordar problemas de toma de decisiones y ofrecer soluciones adecuadas. Estos enfoques científicos se basan en la modelización matemática, el análisis de datos y la optimización.

Por otro lado, la Investigación Operativa también se puede ver como un arte debido a que el éxito en todas las etapas del proceso, tanto antes como después de aplicar el modelo matemático, depende en gran medida de las habilidades y experiencia de los analistas encargados de tomar las decisiones. Estos profesionales deben aplicar su juicio, intuición y conocimiento experto para interpretar los resultados obtenidos, adaptar las soluciones a la realidad del problema y considerar factores no cuantificables.

La Investigación Operativa combina la rigurosidad científica al ofrecer técnicas y algoritmos matemáticos, con la creatividad y habilidades artísticas de los analistas para aplicar estas herramientas de manera efectiva y lograr soluciones óptimas a los problemas de decisión.

1.2 DEFINICIONES ENTORNO A LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

La Administración de Operaciones, según Collier, D. y Evans, J (2015), se basa en tres conceptos clave: recursos, sistemas y transformación y actividades de valor agregado. Los recursos, como las personas, los materiales y el capital, son elementos esenciales en el proceso operativo, y los recursos humanos son considerados especialmente importantes. Los sistemas operativos son fundamentales para gestionar eficientemente los recursos y maximizar la productividad. Por último, la transformación y las actividades de valor agregado se refieren a la conversión de recursos en productos o servicios que generan valor para los clientes. En resumen, la Administración de Operaciones se centra en la gestión de recursos, la implementación de sistemas eficientes y la creación de valor a través de la transformación de los recursos en resultados satisfactorios.

Por su parte Winston (2006) considera que la Investigación de Operaciones incluye un planteamiento científico para la toma de decisiones en busca determinar cómo diseñar y operar mejor un sistema normalmente bajo condiciones que requiere la asignación de escasos recursos.

Bajo el criterio de Alzate (2022) la Investigación de Operaciones se ocupa de la distribución eficaz de recursos limitados y puede considerarse tanto un arte como una ciencia. Como arte, refleja la interpretación creativa de modelos matemáticos en situaciones específicas, mientras que como ciencia se basa en métodos de cálculo y algoritmos para resolver dichos modelos. Esta combinación de enfoques artísticos y científicos permite abordar problemas complejos y encontrar soluciones óptimas en diversas situaciones.

Por lo entendido, la Investigación Operativa es una representación idealizada (simplificada) de un sistema de la vida real; este sistema puede ya estar en existencia o puede todavía ser una idea en espera de ejecución; en el primer caso el objetivo del modelo es analizar el comportamiento del sistema a fin de mejorarlo, y en el segundo se busca mejorar los planteamientos para arrancar con su ejecución.

1.3 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

La investigación de operaciones, también conocida como la ciencia de la toma de decisiones, combina las matemáticas y la computación para ayudar a los administradores a tomar decisiones racionales en la solución de problemas. Esta disciplina utiliza técnicas y modelos matemáticos para analizar situaciones complejas y encontrar soluciones óptimas, utilizando herramientas computacionales para agilizar el proceso. Al aplicar la investigación de operaciones, los administradores pueden tomar decisiones informadas y eficientes, maximizando los recursos disponibles y logrando resultados óptimos.

Aunque algunos problemas resultan simples como para que un administrador pueda aplicar su experiencia personal para resolverlo, en el complejo mundo actual muchos problemas no se pueden resolver de esta manera. Las evoluciones de las alternativas son difíciles debido a la cantidad de información que debe ser procesada o por el número de soluciones alternativas que arroja el modelo, en este amplio mundo, un administrador no puede evaluar todas, pero sí seleccionar una de ellas.

Las técnicas de la administración se aplican a las siguientes categorías básicas de un problema.

1. **Problemas determinísticos.** - En los que toda la información necesaria para obtener una solución se conoce con certeza, y;

2. **Problemas Estocásticos.** - En los que una parte de la información necesaria para obtener una solución no se conoce con certeza, sino más bien se comporta de una manera probabilística.

La Investigación Operativa, al abordar diversos problemas, combina disciplinas como matemáticas, estadística y economía para comprender las relaciones de causa y efecto en el comportamiento de las variables en un fenómeno en estudio. Además, busca incorporar criterios cualitativos con el objetivo de proporcionar soluciones prácticas a los problemas. Esta disciplina se centra en el análisis riguroso y sistemático de los problemas, utilizando modelos matemáticos y técnicas estadísticas para tomar decisiones informadas y eficientes. Al considerar tanto aspectos cuantitativos como cualitativos, la Investigación Operativa permite abordar de manera integral los desafíos complejos y encontrar soluciones prácticas que maximicen los resultados.

La Investigación Operativa surgió en el campo de la administración después de la Segunda Guerra Mundial, debido a la necesidad de gestionar eficientemente los recursos escasos. Durante el conflicto, hubo una demanda creciente de utilizar de manera óptima los recursos disponibles, como mano de obra, materiales y tiempo, para lograr los objetivos militares. Como resultado, se desarrollaron metodologías y técnicas basadas en la ciencia, las matemáticas y la estadística para abordar problemas complejos de gestión y toma de decisiones. Estas herramientas se aplicaron posteriormente en el ámbito empresarial, permitiendo a los administradores optimizar la asignación de recursos, mejorar la eficiencia y maximizar los resultados. La Investigación Operativa se convirtió así en una disciplina fundamental en la administración moderna, contribuyendo a la toma de decisiones informadas y eficaces en entornos con recursos limitados.

En la actualidad, la Investigación Operativa ha demostrado su relevancia y eficacia en numerosos casos resueltos a través de diversos modelos. Las áreas clave de aplicación incluyen la Programación Lineal (PL), la Programación Dinámica (PD), el transporte, las asignaciones, los costos y la administración de inventarios, el control y la gestión de proyectos, así como las inversiones. Estos campos son ampliamente analizados en el ámbito empresarial, ya que las herramientas de la Investigación Operativa contribuyen de manera efectiva a la toma de decisiones y al desarrollo tanto de pequeñas como de medianas y grandes empresas. Estas metodologías permiten una gestión más eficiente y eficaz de los recursos, optimizando procesos, reduciendo costos y mejorando la productividad. En consecuencia, la Investigación Operativa continúa siendo una disciplina fundamental en el mundo empresarial actual.

1.4 METODOLOGÍA APLICADA A LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

El uso de métodos cuantitativos para la solución de problemas implica la participación de múltiples personas dentro de una organización. En un equipo de proyectos, los individuos recopilan información proveniente de diversas áreas de la empresa relacionada con los diferentes aspectos del problema en cuestión. Esta colaboración interdisciplinaria permite obtener una visión integral de la situación, al combinar conocimientos y perspectivas de diferentes áreas y expertos. La recopilación de información precisa y relevante es fundamental para el análisis y la aplicación de los métodos cuantitativos, ya que brinda una base sólida para la toma de decisiones informadas. Además, el trabajo en equipo fomenta la colaboración, la comunicación efectiva y la generación de ideas creativas, lo que contribuye a la resolución exitosa de problemas y al logro de los objetivos de la organización.

El proceso de aplicar, métodos cuantitativos requiere de una sucesión sistemática de pasos.

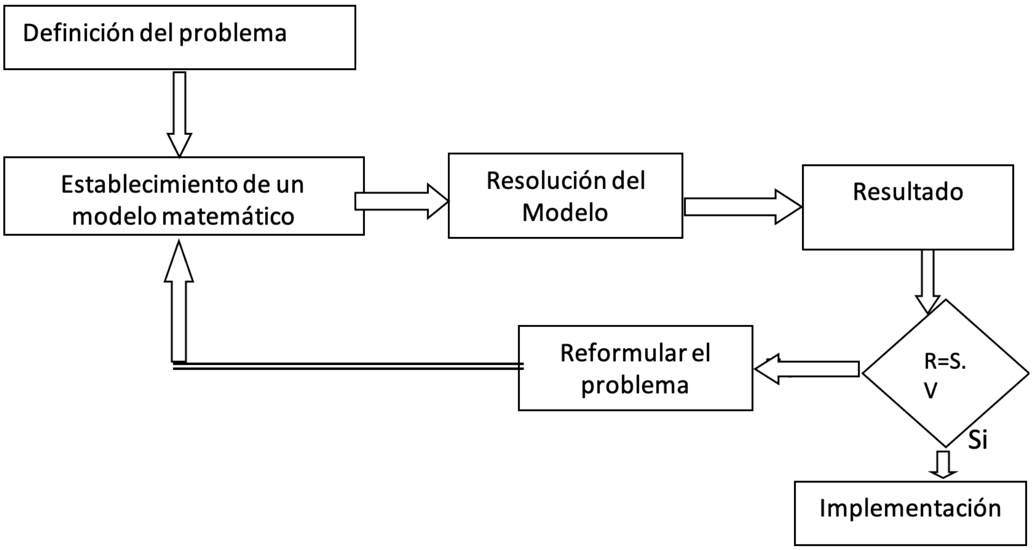


Figura 1.1. Metodología para la resolución de problemas de Investigación Operativa.

En términos prácticos, una de las diferencias más notables entre los modelos científicos puros y los modelos de Programación Matemática es la introducción del concepto de función objetivo o utilidad en estos últimos. En un modelo de Programación Matemática, el objetivo principal es controlar sistemas y maximizar o minimizar una función objetivo específica. Este enfoque implica utilizar los recursos y conocimientos del analista para representar la realidad de manera simplificada y encontrar soluciones óptimas. En consecuencia, un modelo de programación matemática busca proporcionar una estructura matemática que permita tomar decisiones eficientes y efectivas, considerando las restricciones y objetivos del sistema en estudio.

La formulación de modelos implica establecer las funciones matemáticas que representan un sistema real. Esto implica definir las variables relevantes que describen el sistema, la función objetivo que se busca maximizar o minimizar, y las restricciones que limitan las posibles soluciones. Estas funciones y restricciones son fundamentales para construir un modelo matemático que permita analizar y tomar decisiones en relación al sistema en estudio. Al definir estas componentes, se crea un marco estructurado que facilita el análisis y la resolución de problemas.

La metodología de formulación, desarrollo e implementación de modelos, consiste en una organización particular de las actividades que conducen a la solución del problema formulado. A continuación, se presenta el conjunto de actividades y la secuencia en que deben ser consideradas:

a) Formulación del problema;
b) Formulación del modelo;
c) Metodología para buscar la solución;
d) Levantamiento de datos;
e) Solución del modelo y análisis de resultados;
f) Implementación de la solución;
g) Comparación de resultados; y,
h) Experiencia.

a) Formulación del problema

Esta etapa es fundamental porque afecta de manera relevante los resultados del modelo, por lo tanto, se la debe reexaminar durante las fases posteriores de la metodología. Su éxito depende del grado de precisión con que se defina el problema, para lo cual es importante considerar toda la información que se pueda obtener del sistema, determinar qué información se puede eliminar y cual se debe incluir, las interrelaciones que existen entre los elementos del modelo, las posibles alternativas de formulación del problema, el tiempo para la toma de decisiones, y sobre todo se debe definir e identificar claramente las metas, las mismas que deben ser expresadas en términos de un objetivo y de las restricciones.

La formulación del modelo debe ser lo más precisa posible, destacando claramente los objetivos buscados. Del grado de precisión con que se defina el problema dependerá la mayor o menor dificultad en llevar a cabo las etapas posteriores.

Quien formula el problema debe tener un conocimiento profundo y completo del sistema a ser representado. El desconocimiento del sistema puede llevar a no detectar claramente el problema o a definirlo de manera equivocada. Muchos problemas no se resuelven porque no han sido definidos como tales.

En la formulación del problema se debe considerar el sistema, su influencia hacia el exterior y su sensibilidad a efectos externos.

Es recomendable que quienes definan el problema sean los niveles ejecutivos de las empresas o instituciones en las que se pretende implementar el modelo.

b) Formulación del modelo

La formulación del problema implica construir un modelo matemático que represente de manera simplificada la realidad y establecer una función objetivo a optimizar. En este modelo se identifican las variables relevantes y se definen las relaciones entre ellas, junto con las restricciones que limitan las soluciones factibles. Mediante técnicas y algoritmos matemáticos, se busca encontrar la solución óptima que maximice o minimice la función objetivo. El propósito es tomar decisiones informadas y encontrar la mejor solución posible al problema planteado.

La Investigación Operativa se diferencia de otras técnicas al definir un modelo que consiste en una función objetivo a optimizar, sujeta a limitaciones específicas. En este modelo, se deben establecer el horizonte de planificación, las variables relevantes, la función objetivo y las restricciones. El horizonte de planificación se determina según la duración estimada del modelo y los datos utilizados. Es importante seleccionar las variables más significativas del sistema real para lograr una representación precisa. Al formular los modelos, se recomienda la participación de equipos interdisciplinarios para obtener una mejor comprensión del sistema en cuestión.

En resumen, la formulación del problema en Investigación Operativa implica construir un modelo matemático que represente de manera clara y sencilla las características del problema. Esto incluye identificar los recursos, las actividades, las variables de entrada y sus relaciones, los resultados esperados y un horizonte de tiempo para alcanzar los objetivos. El modelo proporciona una representación formal del sistema y es fundamental para establecer la eficacia y el cumplimiento de los objetivos planteados.

En Programación Lineal para la formulación de modelos se utilizan varios elementos entre los que se consideran valores cuantificables, cada uno de ellos constituirá una variable de decisión ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), la función objetivo ($z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$) que estará sujeta a restricciones, expresadas mediante inecuaciones o igualdades ($a_{ij} x_i + \cdots + a_{nm} \leq b_j$), donde las constantes de la función objetivo ($c_1, c_2, \ldots, c_n$) y de las restricciones (a_{ij}) son llamadas parámetros del modelo.

Para que un modelo sea una representación válida del problema, los valores que tomen las variables de decisión deben maximizar o minimizar la función objetivo (Max, Min), sujeta a las restricciones especificadas.

Las diversas situaciones que se pueden presentar en la realidad, permiten enfrentar sistemas de gran tamaño y complejidad, los mismos que para que sean manejables se los puede representar mediante submodelos, que unidos representan a todo el sistema original.

c) Metodología para buscar la solución

Concluida la fase de formulación del modelo, se procede a buscar el método que permita resolverlo, esto es, la técnica mediante la cual se encuentren los valores de cada una de las variables de decisión para llegar a la solución óptima.

En ocasiones, de acuerdo con la naturaleza del problema, no es posible definir claramente un método analítico para resolverlo, entonces, es necesario reformular las etapas anteriores para una revisión o simplificación del modelo, a fin de facilitar, si es posible el análisis posterior del mismo.

En el caso de los modelos en Investigación Operativa, el método se encuentra definido, por lo que esta etapa se puede considerar que ha sido resuelta, sin embargo, este proceso también puede influenciar la reestructuración del modelo en virtud de alguna complejidad que puede dificultar la utilización del método existente.

d) Levantamiento de datos

En la fase de determinación de datos en Investigación Operativa, es importante identificar el conjunto de datos necesarios para alimentar el modelo. Estos datos pueden estar disponibles o requerir esfuerzos adicionales para obtenerlos, lo cual puede llevar un tiempo considerable, incluso igual o mayor que el horizonte de planificación del modelo. Es fundamental evaluar la disponibilidad y la dificultad para obtener los datos, ya que su calidad y precisión influirán en la validez y confiabilidad de los resultados obtenidos a partir del modelo.

En modelos matemáticos de planificación regional o a nivel de país, generalmente se requieren volúmenes grandes de información que pueden estar descentralizadas, por lo tanto, será necesario formar un equipo que se encargue de recopilar esta información, dándoles a seguir el tratamiento necesario para que puedan ser utilizadas en el modelo.

En muchas ocasiones los datos pueden estar distorsionados o desactualizados. Por lo tanto, es conveniente tomar en cuenta la calidad y confiabilidad de los datos que alimentan al modelo, ya sea experimental o estadísticamente, verificando de esta forma silos datos satisfacen todos los requerimientos del modelo, si no es así, se puede iniciar lo que se conoce como enriquecimiento del modelo que consiste en modificar y validarlo regresando inclusive a etapas anteriores, hasta obtener un modelo que represente más fielmente al sistema y nos permita confiar en las decisiones que se tomarán basadas en él.

e) Solución del modelo y análisis de resultados

En esta etapa se determinan los valores para cada una de las variables de decisión que optimizan la función objetivo y cumplen con todas las restricciones, es decir, aquellos valores que nos permiten alcanzar la efectividad del sistema representado.

No siempre es posible obtener una solución óptima del modelo, si no es factible hacerlo, es necesario reformarlo o volver a las fases anteriores hasta obtener los resultados esperados. Si el modelo está bien construido, la solución será una alternativa óptima para la toma de decisiones.

Los resultados obtenidos reflejarán la estructura del modelo y de los datos con que se alimentó al mismo; estos resultados deben ser analizados de acuerdo con el conocimiento previo que se posee del sistema. Su análisis exige un conocimiento total del sistema, ya que, si los resultados están “distorsionados” con la realidad, significa que se deben reestructurar las etapas anteriores, porque se supone que el modelo y su funcionamiento nos deben dar resultados de acuerdo a la realidad que tratan de representar.

f) Implementación de la solución

Es importante en la fase de implementación, la decisión de los niveles ejecutivos y la cooperación del personal técnico y administrativo para llevar a efecto la misma.

La implementación de acuerdo a la dimensión del sistema podrá llevar un tiempo considerable; durante ese tiempo las condiciones iniciales del sistema pueden haber cambiado, por lo que, se hace necesario una continua realimentación a las etapas anteriores para obtener resultados actualizados.

Un modelo tiene un horizonte de planificación que establece el periodo de tiempo para el cual se realizarán las predicciones o decisiones. Sin embargo, es importante tener en cuenta que los datos utilizados en el modelo también tienen un periodo de validez, puesto que la información puede cambiar con el tiempo debido a diversos factores. Por lo tanto, la implementación del modelo puede ser repetitiva, en el sentido de que se requiere actualizar y ajustar los datos a medida que se producen cambios o se reestructura el modelo. Esto garantiza que las decisiones tomadas sean basadas en información actualizada y precisa, mejorando así la efectividad y relevancia del modelo en el tiempo.

El procedimiento mediante el cual el flujo de información puede ir de una etapa para la siguiente o a la anterior, permite obtener resultados que aproximan el modelo a la realidad. Más aún, todo problema necesita ser sometido a un análisis de sensibilidad, post optimización y/o parametrización de soluciones y por tanto de alternativas entre las cuales se puede seleccionar una para ser implementada.

g) Comparación de resultados

La comparación de resultados obtenidos mediante la implementación es una necesidad constante si se quiere optimizar el sistema y va acompañada de los subsidios que al técnico le da la vivencia en el problema.

Los resultados obtenidos requieren ser comparados con la situación real del sistema para conocer si los mismos deben o no ser implementados. Esta comparación se la realizará con resultados de sistemas que hayan sido implementados, y también se fundamentarán en el conocimiento que el analista o técnico pose del sistema real.

h) Experiencia

Una toma de decisiones efectiva se apoya en un análisis cuantitativo sólido, respaldado por el conocimiento y la experiencia del experto en las variables involucradas en las etapas previas. Esta experiencia garantiza la vigencia continua del modelo como un sistema válido a lo largo del tiempo.

1.5 CONCLUSIONES PARCIALES

La metodología presentada puede ser generalizada para la formulación e implementación de cualquier tipo de programación matemática. La utilización de esta metodología en Investigación de Operaciones dentro de un problema específico determinará la mayor o menor importancia de cada una de las fases, así como también el tiempo requerido para cada una de ellas.

Para resolver un problema es importante conocer detallada y profundamente el sistema para poder construir un modelo que lo represente lo más aproximado a la realidad. El modelo deberá ser sometido a varias pruebas y verificaciones hasta que las soluciones obtenidas estén de acuerdo a la situación real.

1.6 APLICACIONES DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

La Investigación Operativa se aplica en una amplia gama de áreas y problemas. En el ámbito económico, se utiliza para análisis económicos, selección de proyectos, concesión de contratos y proyecciones. En el sector agrícola y ganadero, se emplea para la producción y planificación agrícola, así como el control de inventarios. También se aplica en problemas de asignación, transporte y teoría de redes. Además, se utiliza para el equilibrio en diversos contextos. Estas son solo algunas de las muchas aplicaciones de la Investigación Operativa, demostrando su utilidad en la toma de decisiones y la optimización en una amplia variedad de campos.

Las aplicaciones más relevantes son aquellas que consideran las operaciones en compañías grandes. A continuación, se describen algunas aplicaciones representativas de Programación Lineal.

El transporte, es una de las primeras aplicaciones de la investigación operativa a través de Programación Lineal, la misma que permite establecer el costo total mínimo del transporte, al llevar a través de diferentes rutas, determinadas cantidades de diversos productos; para lo cual se considera el costo unitario del transporte desde el origen hasta el destino, la cantidad disponible de cada artículo en el origen, la cantidad requerida en el destino, y se debe determinar la cantidad de cada artículo a ser transportado desde cada origen a cada destino, para obtener el costo mínimo.

Los flujos en redes, consiste en establecer el flujo máximo desde un nado inicial a un nado final, pasando a través de una ruta formada por varios arcos con determinada capacidad entre ellos.

Asignaciones de personal, tiene como objetivo optimizar el rendimiento de cada uno de los funcionarios de la empresa o compañía en determinado puesto, de acuerdo con la estimación de sus capacidades, habilidades, entrenamiento y experiencia.

En la concesión de contratos, la investigación operativa se presenta como una de las mejores alternativas para determinar a qué ofertante se debe conceder un contrato de manera que se obtenga el costo mínimo considerando cantidad máxima y mínima ofertada para cada uno de los artículos ofrecidos, precio de transporte e inclusive otras condiciones particulares de cada contrato.

En la industria metalúrgica, la Programación Lineal desempeña un papel fundamental en la optimización de la producción. Se utiliza para desarrollar planes de producción que buscan minimizar los costos, teniendo en cuenta la capacidad de la planta y de cada máquina. Además, se consideran factores como los pronósticos de ventas y las tasas de embarque para asegurar una planificación eficiente. Además, la Programación Lineal también puede ser aplicada en el control de la contaminación del aire causada por los desechos de los procesos, permitiendo encontrar soluciones que minimicen el impacto ambiental mientras se mantienen los estándares de producción. En resumen, la Programación Lineal se utiliza en la metalúrgica para mejorar la eficiencia y la sostenibilidad en la planificación y control de la producción.

La industria petrolera se beneficia ampliamente de la Programación Lineal en diferentes aspectos. En la organización de refinerías, se utiliza para optimizar los niveles de operación y maximizar la eficiencia. En la evaluación de inversiones, se emplea para determinar las mezclas de crudo que generen mayores ganancias. También se utiliza en la asignación de crudo a distintas refinerías, la gestión óptima de inventarios de productos derivados y la planificación de la producción en función de la demanda variable a lo largo del año. La Programación Lineal se convierte en una herramienta clave para la toma de decisiones en la industria petrolera, permitiendo maximizar la rentabilidad y la eficiencia en diversas áreas de operación.

La industria química, utiliza la Programación Lineal para optimizar procesos, establecer condiciones de producción y para la administración de inventarios de materias primas.

La industria maderera, contempla diferentes actividades agrupadas en procesos de acuerdo con sus funciones. La Programación Lineal facilitará mejorar los procesos de distribución de materias primas a cada una de las etapas de producción al igual que a cada centro de demanda.

En la industria papelera, la Programación Lineal se aplica principalmente en dos áreas clave. En primer lugar, se utiliza para resolver el problema de agrupar las órdenes de corte de papel de manera que se minimice el desperdicio de material. Esto implica encontrar la mejor combinación de órdenes y patrones de corte para optimizar la utilización del papel y reducir los residuos. En segundo lugar, la Programación Lineal se utiliza en la determinación del costo mínimo de distribución de los productos de papel a los centros de demanda. Esto implica encontrar la configuración óptima de rutas de distribución y asignación de productos a fin de minimizar los costos logísticos. En resumen, la Programación Lineal desempeña un papel importante en la optimización de la producción y distribución en la industria papelera, permitiendo reducir el desperdicio de papel y los costos asociados.

La industria manufacturera, en general se utiliza la Programación Lineal para obtener el máximo beneficio en la fabricación de diversos productos, que necesitan determinadas cantidades de recursos.

En la economía, la Programación Lineal encuentra su primera aplicación en el análisis de insumo-producto o análisis intersectorial. Este enfoque utiliza una matriz de insumo-producto para representar las interrelaciones entre sectores económicos en términos de producción y demanda. La Programación Lineal ayuda a determinar las cantidades óptimas de producción y consumo de cada sector, considerando restricciones y objetivos específicos, lo que permite tomar decisiones informadas sobre políticas económicas y planificación del desarrollo. Por consiguiente, la Programación Lineal es una herramienta valiosa para comprender y optimizar la estructura económica de un país o región.

En el contexto de la Programación Lineal, existen dos clases de modelos dentro del análisis de insumo-producto: el modelo de Leontief y el modelo dinámico establecido por Wagner. El modelo de Leontief se enfoca en la economía en un solo período, mientras que el modelo dinámico considera el comportamiento económico a lo largo de varios períodos.

La principal diferencia entre estos modelos radica en la consideración de la expansión de los niveles de capacidad de cada sector para satisfacer las demandas futuras. En el modelo dinámico de Wagner, se incorpora la previsión de la expansión de capacidad, lo que implica tener en cuenta los planes de crecimiento y expansión de los sectores económicos a lo largo del tiempo. Esto permite evaluar cómo los cambios en la capacidad de producción de los sectores afectan las interrelaciones y los flujos de insumos y productos entre ellos.

En el ámbito agrícola, la Programación Lineal se aplica en dos áreas: la economía regional y la gestión de granjas. En términos de la economía regional, se busca reducir el desempleo rural y aumentar las exportaciones, considerando aspectos como tarifas, fletes y centros de producción. La Programación Lineal se utiliza para optimizar la asignación de recursos y maximizar el impacto económico positivo en la región. En la gestión de granjas, se busca maximizar las ganancias netas considerando factores como la superficie disponible, el agua y el trabajo. Esto se aplica en la determinación de la rotación de cultivos y en la toma de decisiones sobre la asignación eficiente de recursos en la granja.

Dietas, la Programación Lineal es ampliamente utilizada en la determinación del costo mínimo de dietas nutricionales, considerando también aspectos como el sabor y las preferencias alimentarias. Además, se aplica en problemas de mezclas de alimentos, formulación de abonos y fertilizantes, compuestos de fluidos y fundido de metales para optimizar la combinación de ingredientes o componentes y lograr propiedades específicas.

La programación de producción enfrenta el desafío de satisfacer la demanda fluctuante de un producto, y la investigación de operaciones, específicamente la Programación Lineal, es útil para determinar soluciones que minimicen el exceso de producción y se adapten a las variaciones de la demanda. Esto se logra considerando el costo de almacenamiento, las horas extras de los trabajadores en períodos de alta demanda y el costo del uso de maquinaria en períodos de baja producción. El objetivo es encontrar un plan de producción eficiente que se ajuste a las fluctuaciones de demanda, minimizando costos y maximizando la satisfacción del cliente.

La Programación Lineal es esencial en el control de inventarios, permitiendo determinar el costo total de administración, la orden óptima de compra, las fechas de colocación de órdenes, los puntos de reorden y la forma de controlarlos, especialmente en períodos de incertidumbre. Al considerar múltiples variables y restricciones, se busca minimizar los costos asociados al inventario, como el mantenimiento, la falta de stock y otros costos operativos. En consecuencia, la Programación Lineal optimiza las decisiones relacionadas con el control de inventarios, garantizando una gestión eficiente y rentable de los mismos.

CAPÍTULO II
2. PROGRAMACION LINEAL

2.1 PROGRAMACIÓN LINEAL: CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La Programación Lineal es una herramienta altamente versátil en la toma de decisiones, ya que puede resolver una amplia variedad de problemas que buscan optimizar una función objetivo dentro de un sistema sujeto a restricciones. Esta técnica matemática permite modelar problemas complejos y encontrar la mejor solución posible, considerando las limitaciones y objetivos específicos del sistema en cuestión. La Programación Lineal ha demostrado ser aplicable en diversos campos, como la economía, la logística, la producción, la distribución de recursos y muchas otras áreas, ayudando a mejorar la eficiencia y la toma de decisiones informadas en una amplia gama de situaciones.

Esta herramienta comenzó a ser formalizada en la década de 1940 y desde entonces ha ganado un gran reconocimiento y énfasis en el campo de la planificación. Esto se evidencia en la gran cantidad de trabajos de alto nivel que se han publicado, los cuales abordan y resuelven una amplia gama de problemas. La Programación Lineal ha demostrado ser una herramienta poderosa para abordar problemas complejos en diversas áreas, como la economía, la logística, la producción, la gestión de inventarios y muchos otros campos. Su capacidad para modelar y optimizar problemas ha llevado a su amplia aplicación y a un crecimiento constante en su relevancia en la toma de decisiones y la resolución de problemas en el ámbito de la planificación.

La Programación Lineal utiliza métodos científicos para proporcionar a los ejecutivos elementos cuantitativos que les ayuden a tomar decisiones relacionadas con las operaciones bajo su control. Para llevar a cabo este proceso, se requiere la formación de equipos multidisciplinarios que incluyan especialistas en cada uno de los factores involucrados en el problema.

La Programación Lineal comienza investigando el comportamiento de un sistema y luego lo representa mediante un modelo matemático, el cual es una abstracción de la realidad e integra todos los factores que conforman el sistema, considerándolos como una función económica.

Estos modelos no necesariamente son versiones complejas de la realidad, llenas de ecuaciones y cálculos complicados. Muchos de los casos exitosos que se encuentran en la literatura o son transmitidos oralmente entre los especialistas se refieren a modelos simples e ingeniosos que logran representar adecuadamente una realidad compleja y brindan información para tomar decisiones más eficientes.

En realidad, todas las decisiones se basan en un "modelo", que es nuestra interpretación de la realidad. A este modelo se le conoce como modelo conceptual y se deriva de nuestra percepción de los fenómenos, generalmente como una imagen mental del problema y sus condiciones. Las mejores decisiones suelen provenir de interpretaciones más profundas (modelos conceptuales mejor definidos) y del uso más inteligente de los recursos de análisis proporcionados por el modelo.

La formalización del modelo conceptual se conoce como el modelo formal del problema, o simplemente el modelo. La transformación del modelo conceptual al modelo formal permite ganar capacidad de análisis, esto es, experimentar con el modelo, procurando alcanzar una situación favorable que sería mucho más difícil de conseguirse cuando se raciocina solamente basándose en el modelo conceptual.

Es cierto que la formalización del modelo puede implicar cierta pérdida de información y que el modelo siempre será una representación aproximada de la realidad. Esto se debe a que el modelo se construye a partir del conocimiento del analista, que es una combinación de información, experiencia y creatividad. Aunque el modelo formal puede capturar muchos aspectos importantes del problema, siempre existirá cierta simplificación y abstracción de la realidad en el proceso de modelado.

Es interesante mencionar que la Programación Lineal tuvo sus orígenes durante la Segunda Guerra Mundial, específicamente en la aeronáutica militar. En ese contexto, se buscaba lograr la utilización óptima de los recursos disponibles y planificar operaciones de ataque de manera eficiente. La Programación Lineal demostró ser una herramienta valiosa para abordar problemas de optimización en el campo militar y, posteriormente, su aplicabilidad se extendió a diversos campos de la economía, la logística y la planificación en general.

En el campo militar se determinan tres elementos básicos:

Elemento	Conceptualización
Estrategia	La precisión de un objetivo
Logística	Recursos disponibles
Táctica	La habilidad para cumplir un objetivo con los recursos disponibles

Tabla 2.1. Elementos de la Programación Lineal.

Dentro de estas operaciones su principal representante George Dantzig, pronto Leontief, aportó principalmente en relaciones ínter industriales a través de su matriz insumo – producto.

En el ámbito industrial, Koopmans exploró aplicaciones macroeconómicas que facilitan la resolución de problemas de producción, asignación de recursos, maximización de beneficios y minimización de costos.

En la actualidad la Programación Lineal, se la define como un modelo sistemático y matemático que enfoca determinado problema para lograr una solución óptima, o un conjunto de soluciones factibles fundamentadas en los siguientes términos:

Linealidad. – La relación lineal utilizada, es decir, se identifica con la cantidad unitaria de cada uno de los factores con respecto a los demás y a las cantidades de cada uno de los productos.

Divisibilidad. – Los procesos pueden ser divisibles mientras se dispongan de recursos, esto quiere decir que se podrán utilizar mientras existan extensiones positivas.

Finitud. – Serán cantidades finitas tanto el número de procesos, como los recursos disponibles, los mismos que se cuantificarán de forma determinística.

Iteraciones. – Aproximaciones sucesivas, ensayos, que reciben el nombre de algoritmos, que según ellos se determinan pasos hasta lograr un objetivo planteado.

2.2 REPRESENTACIONES DEL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL

2.2.1 Matemática

El modelo de Programación Lineal se caracteriza por la utilización de funciones lineales para representar la función objetivo y las restricciones. Existen diferentes formas de expresar el modelo de Programación Lineal.

La siguiente es reconocida como la forma estándar. La ecuación 2.1 nos muestra la función de optimización de parámetros que se pueden emplear dentro del ámbito empresarial (Z):

Maximizar ó minimizar $Z = C1X1 + C2X2 + \cdots + CnXn$ (2.1)

Donde:

$c_1 + c_2, \dots, c_n$, constituyen los coeficientes de la función objetivo, los mismos que pueden ser precios, costos, beneficios, compradores, entre otros.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, constituyen las variables del problema; es decir, representan lo que se quiere determinar.

Sujeta a las restricciones: constituyen un conjunto de inecuaciones/ecuaciones, que nos dan las condiciones finitas de un problema, constituyen esencialmente los coeficientes técnicos de producción, transporte, o asignación, en función al problema que se trate de dar solución.

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_1 = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array} \tag{2.2}
$$

Donde:

$a_{11} + a_{12}, \dots, a_{1n}$, representan la utilización de determinado recurso de la unidad de un bien ($x_1, x_2, \dots, x_n$).

$b_1 + b_2, \ldots, b_n$, las limitantes del sistema

n = número de variables

m = número de restricciones

Condición de no negatividad

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{2.3}$$

o,

$$\forall x_{ij} \geq 0$$

Esto es, tenemos una función lineal con variables no negativas que se desea maximizar o minimizar (2.1), llamada función objetivo, sujeta a un conjunto de funciones lineales, que se las denomina restricciones (2.2) y (2.3).

Los a_{ij}, b_i y c_j son constantes dadas, que constituyen los parámetros del modelo, las x_j son las variables de decisión y el objetivo es encontrar un vector $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfaga las restricciones y optimice la función objetivo.

2.2.2 Sumatorias

Maximizar o Minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^{m}(\mathrm{O}) \sum_{j=1}^{n}(\mathrm{D})\ c_1\, x_1 \tag{2.4}$$

Sujeta a:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i\ ; \quad i = 1,\ m \tag{2.5}$$

Cantidad total en el origen a_i

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j\ ; \quad j = 1,\ n \tag{2.6}$$

Cantidad total requerida en el destino b_j

Donde:

$\sum_{i=1}^{m}(\mathrm{O})$, representa los orígenes

$\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{D})$, representa los orígenes

c_1 x_1, representa el costo de una unidad a ser transportada desde *i* hasta *j*.

Condición de no negatividad, expresión (2.3).

$\forall x_{ij} \geq 0$

2.2.3 Forma Matricial

Maximizar o Minimizar $Z=CX$ (2.7)

Sujeta a: $Ax = b \quad \forall \text{ x} \geq 0$ (2.8)

Donde:

C es un vector lineal n–dimensional

$C = (c_1 + c_2, \dots, c_n)$

X es un vector columna *n*–dimensional.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A es una matriz de $m * n$ dimensiones.

$A = (a_{ij}), i = 1,m; j = 1,n$

B es un vector columna *m*–dimensional

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

0 es un vector columna *n*–dimensional

$$0=\begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_n \end{bmatrix}$$

2.2.4 Forma Mixta

Maximizar o minimizar (2.5)

Sujeta a:

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n = P_0 \tag{2.9}$$

Donde:

P_j = es un vector columna m–dimensional y es la j–ésima columna de la matriz A.

P_0 = es un vector columna m–dimensional

$P_0 = b$, entonces P_0 y b son vectores columna m–dimensional

2.3 EL PROBLEMA GENERAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Se representa por la limitación de recursos, los mismos que deben ser distribuidos de la mejor forma como combinaciones matemáticas permitan relacionarlas a un mismo objetivo.

Dentro de los problemas de programación lineal, se deberá cumplir cuatro condiciones necesarias:

1. **Función Objetivo. –** Que expresará la cantidad que va a ser maximizada o minimizada, en función al objetivo propuesto.
2. **Horizonte de planificación. –** Unidad temporal en la que se pretende conseguir el objetivo, este puede ser minutos, días, meses, etc.
3. **Limitaciones. –** Será el conjunto de coeficientes técnicos a los cuales se sujeta el objetivo propuesto. Los coeficientes técnicos constituyen ecuaciones lineales con dos o más incógnitas x, y, z, como se expresa a continuación:

$$\begin{aligned} a_{11} x + a_{12} y &= b_1 \\ a_{21} x + a_{22} y &= b_2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 y b_2 son números dados. Cada una de estas ecuaciones es una línea recta. La pendiente de la primera recta es $-a_{11}/a_{12}$; la pendiente de la segunda recta es $-a_{21}/a_{22}$ (si $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$). Una solución del sistema (1) es un par de números, denotados por (x, y), que satisface (1). Es natural preguntar si (1) tiene alguna solución o soluciones, y si las tienen, ¿cuántas son? Se darán respuestas a estas preguntas después de ver algunos ejemplos. En ellos se harán uso de dos resultados importantes tomados del álgebra elemental.

Resultado A Si a = b y c = d, entonces a + c = b + d.

$$a = b \text{ y } c = d \rightarrow a + c = b + d \tag{2.11}$$

Resultado B Si a = b y c es cualquier número real, entonces ca = cb.

$$a = b \text{ y } c \in R \rightarrow ca = cb \tag{2.12}$$

Según el resultado A, si se suman dos ecuaciones, lo que se obtiene es una tercera ecuación válida. El resultado B indica que, si ambos lados de una ecuación se multiplican por una constante, lo que se obtiene es una segunda ecuación válida. Se supondrá que $c \neq 0$ ya que, aun cuando la ecuación 0 = 0 es correcta, no es muy útil.

Ejemplo 1 Sistema con solución única

Considérese el sistema (fórmula 2.10)

$$x - y = 7$$

$$x + y = 5$$

Al sumar las dos ecuaciones se obtiene, por el resultado A, la ecuación siguiente:

$2x = 12$ (es decir, $x = 6$). Entonces, de la segunda ecuación, $y = 5 - x = 5 - 6 = -1$. Por tanto, el par (6, –1) satisface el sistema. Por la forma en que se ha encontrado la solución, se ve que no existe ningún otro par que satisfaga ambas ecuaciones. Por tanto, el sistema tiene una solución única.

Ejemplo 2 Sistema con un número infinito de soluciones

Considérese el sistema (fórmula 2.10)

$$x - y = 7$$

$$2x - 2y = 14$$

Es obvio que estas dos ecuaciones son equivalentes. A fin de comprobar esto, multiplíquese la primera por 2. Esto lo permite el resultado B. Entonces $x - y = 7$ o $y = x - 7$. Por tanto, el par $(x, x - 7)$ es una solución del sistema (2) para todo número real x. Dicho con otras palabras, el sistema tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, los pares siguientes son soluciones: (7, 0), (0, –7), (8, 1), (1, –6), (3, – 4), y (–2, –9).

Ejemplo 3 Sistema sin solución

Considere el sistema (fórmula 2.10)

$$x - y = 7$$

$$2x - 2y = 13$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 (lo cual, otra vez, está permitido por el resultado B) se obtiene $2x - 2y = 14$. Esto contradice a la segunda ecuación. Entonces el sistema no tiene solución.

Es fácil explicar los resultados de los ejemplos anteriores si se adopta un punto de vista geométrico. Primero, cabe repetir que las ecuaciones del sistema (ejemplo 1) son las ecuaciones de líneas rectas. Una solución de (1) es un punto (x, y) que esté en ambas rectas. Si éstas no son paralelas, entonces se deben cortar o cruzar en un solo punto. Si son paralelas, entonces nunca se cruzan (no tienen puntos en común) o bien son la misma recta (tiene un número infinito de puntos en común).

En el ejemplo 1, las pendientes de las rectas son 1 y –1, respectivamente. Eso quiere decir que no son paralelas. El único punto que tienen en común es el (6, –1). En el ejemplo 2 las rectas son paralelas (la pendiente es 1) y coincidentes. En el ejemplo 3 las rectas son paralelas y distintas. Todas estas relaciones se ilustran en la figura 2.1.

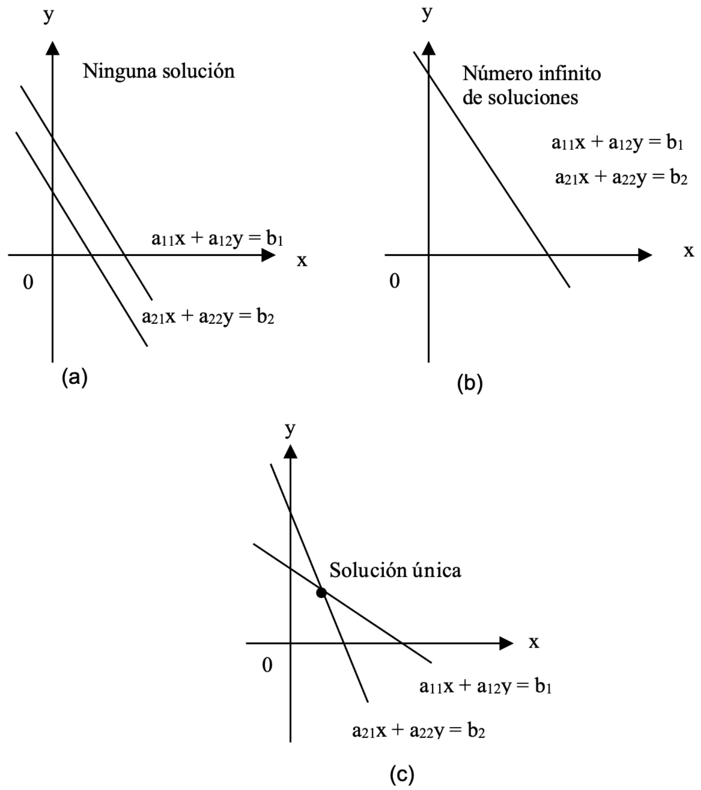


Figura 2.1. Relaciones de las ecuaciones.
(a) Las rectas coinciden, el número de puntos de intersección es infinito;
(b) Rectas paralelas; ningún punto de intersección y
(c) Rectas no paralelas; un solo punto de intersección.

Dos rectas se pueden intersecar en un punto, en ningún punto o (si coinciden) en un número infinito de puntos.

Ahora se resolverá de manera formal el sistema, por lo tanto, se tiene (fórmula 2.10):

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1$$

$$a_{21}\,x + a_{22}\,y = b_2$$

Si $a_{12} = 0$, entonces $x = \frac{b_1}{a_{11}}$ y se puede utilizar la segunda ecuación con el objeto de resolver para *y*.

Si $a_{22} = 0$, entonces $x = \frac{b_1}{a_{21}}$ y se puede emplear la primera ecuación con el objeto de resolver para *y*.

Si $a_{12} = a_{22} = 0$, entonces el sistema (4) sólo contiene la incógnita x.

Por tanto, puede suponerse que ni a_{12} ni a_{22} son cero.

Si la primera ecuación se multiplica por a_{22} y la segunda por a_{12}, se obtiene:

$$a_{11}a_{22}\,x + a_{12}a_{22}\,y = a_{22}b_1$$

$$a_{12}a_{21}\,x + a_{12}a_{22}\,y = a_{12}b_2$$

Sistemas equivalentes. – Antes de continuar hemos de notar que las ecuaciones del sistema (4) son equivalentes. Esto último significa que cualquier solución de la ecuación (1) es solución de la ecuación (2) y viceversa. La equivalencia es consecuencia inmediata del resultado B si en éste se supone que c no es cero. A continuación, se resta la segunda ecuación de la primera, obteniéndose.

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\mathrm{x} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \qquad (2.13)$$

En este punto es necesario hacer una pausa.

Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces se puede dividir entre esta cantidad para obtener:

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Determinante. – Luego se puede sustituir este valor de x en el sistema (4) a fin de resolver para y, hallándose así la solución única del sistema. El determinante del sistema (4) se define por:

$$\boxed{\text{Determinante del sistema (4)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Y se ha mostrado lo siguiente:

Si el determinante del sistema (4) $\neq 0$, entonces el sistema tiene una solución única.

¿Qué relación hay entre este enunciado y lo que se había discutido antes? En el sistema (4) se ve que la pendiente de la primera recta es $-a_{11}/a_{12}$ y que la pendiente de la segunda es $\frac{-a_{21}}{a_{22}}$. En los problemas siguientes se pide mostrar que el determinante del sistema (4) es cero si y sólo si las rectas son paralelas (tienen pendientes iguales). Por tanto, si el determinante no es cero, las rectas no son paralelas y el sistema tiene una solución única.

Ahora se reunirán en un teorema los hechos analizados hasta aquí. Es un teorema que se generalizará en secciones posteriores de este capítulo y en los capítulos siguientes. Se llevará la cuenta del progreso alcanzado llamándole "teorema creciente". Cuando todas sus partes hayan sido demostradas, se podrá ver una notable relación entre varios conceptos importantes del álgebra lineal.

Teorema 1: Teorema creciente, versión 1. El sistema (fórmula 2.10)

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1$$

$$a_{21}\,x + a_{22}\,y = b_2$$

De dos ecuaciones con las dos incógnitas x y y no tiene solución, tiene una solución única o bien tiene un número infinito de soluciones, es decir:

i. Una solución única si y sólo si su determinante es diferente de cero.

ii. Ninguna solución o un número infinito de soluciones si y sólo si su determinante es cero.

***m* Ecuaciones son *n* Incógnitas**

En esta sección se describirá un método para hallar todas las soluciones (si las hay) de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Al hacerlo se verá que, como en el caso de 2 x 2, tales sistemas no tienen solución, tienen una sola solución o bien tienen un número infinito de soluciones. Antes de abordar el método general veamos algunos ejemplos. Como variables se utilizarán x_1, x_2, x_3, etc., en vez de x, y, z, ya que la notación con subíndices facilita la generalización.

Ejemplo 1 Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (fórmula 2.10): solución única. Resuelva el sistema.

Solución. Lo que se busca son tres números x_1, x_2 y x_3 que satisfagan a las tres ecuaciones en (1). El método de solución será simplificar las ecuaciones de tal modo que las soluciones se pueden identificar con facilidad. Se comienza dividiendo la primera ecuación entre 2; por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Al sumar las dos ecuaciones se llega a una tercera ecuación válida. Esta última puede sustituir cualquiera de las dos ecuaciones del sistema empleadas para obtenerla. Primero se simplificará el sistema (2) multiplicando por –4 ambos lados de la primera ecuación de (2) y sumando esta nueva ecuación a la segunda. Se obtiene entonces:

$$\begin{array}{r}
-4x_1 - 8x_2 - 12x_3 = -36 \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\
\hline
-3x_2 - 6x_3 = -12
\end{array}$$

La ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$ es la nueva segunda ecuación, por lo que el sistema es ahora

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\
-3x_2 - 6x_3 &= -12 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4
\end{aligned}$$

Luego, la primera ecuación se multiplica por –3 y el resultado se suma a la tercera ecuación:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\
-3x_2 - 6x_3 &= -12 \\
-5x_2 - 11x_3 &= -23
\end{aligned}$$

Obsérvese que en el sistema (3) la variable x_1 ya no aparece en la segunda y tercera ecuaciones. Acto seguido, la segunda ecuación se divide entre –3:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\
x_2 + 2x_3 &= 4 \\
-5x_2 - 11x_3 &= -23
\end{aligned}$$

La segunda ecuación se multiplica por –2 y el resultado se suma a la primera, y luego la segunda ecuación se multiplica por 5 y el resultado se suma a la tercera:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_3 &= 1 \\
x_2 + 2x_3 &= 4 \\
-x_3 &= -3
\end{aligned}$$

La tercera ecuación se multiplica por –1:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_3 &= 1 \\
x_2 + 2x_3 &= 4 \\
x_3 &= 3
\end{aligned}$$

Por último, la tercera ecuación se suma a la primera y luego la tercera ecuación se multiplica por –2 y el resultado se suma a la segunda, obteniéndose el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Eliminación de Gauss–Jordan.– Esta es la solución única del sistema. Se escribe en la forma (4, –2, 3). El método empleado aquí recibe el nombre de eliminación de Gauss–Jordan.

Antes de iniciar con la resolución de ejemplos, se hará un resumen de lo que se ha hecho:

i. Se dividió para hacer que el coeficiente de x_1, en la primera ecuación fuese igual a 1.

ii. Se "eliminaron" los términos que contenía x_1, en la segunda y tercera ecuaciones. Es decir, los coeficientes de esos términos se hicieron iguales a cero multiplicando la primera ecuación por los números apropiados y luego sumando los resultados a la segunda y tercera ecuaciones, respectivamente.

iii. Se dividió a fin de que el coeficiente del término con x_2, en la segunda ecuación fuese igual a 1, y luego se procedió a emplear la segunda ecuación para eliminar los términos con x_2 de la primera y tercera ecuaciones.

iv. Se dividió para hacer que el coeficiente del término con x_3 en la tercera ecuación fuese igual a 1, y luego se procedió a emplear la tercera ecuación para eliminar los términos con x_3 de la primera y segunda ecuaciones.

v. **Condición de no negatividad. –**Es decir que en ningún caso se aceptarán resultados negativos en las respuestas, no es posible tener producción negativa o simplemente gastos negativos, en estos casos la resolución será igual o mayor que cero.

$$X_n \geq 0$$

vi. **Condiciones de Optimización. –** Las mismas se van obteniendo por aproximaciones sucesivas y nos presentan las siguientes soluciones:

- Solución Factible. – La misma que satisface las limitaciones del problema planteado.
- Solución básica factible. – Aquella que satisface tanto a las limitaciones como a la condición de optimización.

2.4 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Dentro de las aplicaciones, el lector se encontrará con casos que contemplan la expresión ≤ (menor o igual) para aquellos que determinan maximización, y, ≥ (mayor o igual) para aquellos que casos que determinan minimización.

2.4.1 Maximización

Problemas de producción

Caso 1: Industrias Metálicas Vilema, fabrica dos tipos de puertas metálicas: P1 y P2. Tiene un beneficio de $ 120 por unidad producida de la puerta P1 y $ 140 por unidad de la puerta P2. La industria conoce el mercado de puertas metálicas y sabe que todas las unidades que produzca serán vendidas.

La capacidad de producción de la industria está limitada por los recursos disponibles. Cada producto debe pasar por los departamentos de montaje y acabado. Cada puerta P1 necesita de 3 horas en el departamento de montaje y 4 horas en el de acabado. Cada puerta P2 necesita 6 horas en el departamento de montaje y 2 en el de acabado. El departamento de montaje dispone de 60 horas/día de trabajo, y el departamento de acabado dispone de 32 horas/día de trabajo.

La industria desea determinar el número de unidades que se pueden fabricar por día, a fin de utilizar al máximo los recursos que dispone, a la vez de maximizar sus utilidades.

	Departamento de Montaje	Departamento de Acabado	Beneficio ($)
Puerta P1	3	4	120
Puerta P2	6	2	140
Disponible Hora/Día	60	32	

Tabla 2.2. Problema de producción caso 1.

1. Formulación del problema:

La formulación del problema será como sigue:

Horizonte de planificación: un día

Variables:

x_1 = número de Puertas tipo P1 a ser fabricados por día.

x_2 = número de Puertas tipo P2 a ser fabricados por día.

Función objetivo

$120x_1$ = lucro obtenido por la producción de las puertas P1

$140x_2$ = lucro obtenido por la producción de las puertas P2

$120x_1 + 140x_2$ = lucro total. ***Función objetivo a ser maximizada***.

$Z_{Max} = 120x_1 + 140x_2$ (fórmula 2.1)

2. Sujeto a:

Restricciones

i. Departamento de montaje

$3x_1$ = número de horas requeridas en el departamento de montaje para la producción de las puertas P1.

$6x_2$ = número de horas requeridas en el departamento de montaje para la producción de las puertas P2.

$3x_1 + 6x_2$ = total de horas requeridas al departamento de montaje, que no deben sobrepasar el número de horas disponibles, 60 horas.

La restricción 1 (fórmula 2.2) sería:

$3x_1 + 6x_2 \leq 60$, en la misma connotación en todos los ejercicios o problemas planteados en el presente libro.

ii. Departamento de acabado

De igual forma se estructura la restricción 2 (fórmula 2.2), relacionada con las horas utilizadas y disponibles del departamento de acabado. La restricción sería:

$4x_1 + 2x_2 \leq 32$

3. No negatividad de las variables

Se incrementan al modelo las restricciones de no negatividad de las variables, esto es, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, en correspondencia a la fórmula 2.3 para todos los ejercicios que se establece en los apartados siguientes.

4. Resolución

El modelo quedaría estructurado de la siguiente manera (fórmula 2.1, 2.2 y 2.3):

Maximizar $Z = 120x_1 + 140x_2$

Sujeto a $\quad 3x_1 + 6x_2 \leq 60$

$4x_1 + 2x_2 \leq 32$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Solución gráfica del problema de programación lineal

La figura 2.2. muestra la solución gráfica del problema de programación lineal para el problema de producción caso 1.

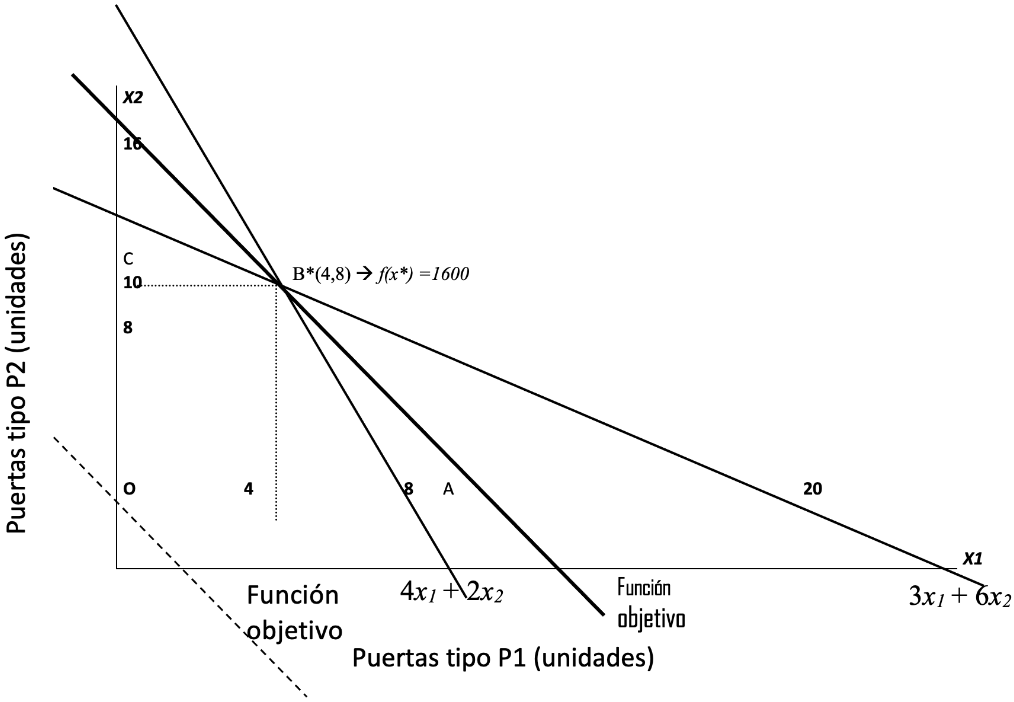


Figura 2.2. Solución gráfica del problema de programación lineal.

OABC: Polígono (conjunto de soluciones viables para satisfacer las restricciones)

OA, AB, BC, OC: Aristas (también son conjuntos de soluciones viables)

O, A, B, C: Vértices (son soluciones viables básicas, es decir asociada a una base)

B*: Punto en el que se encuentra la solución óptima.

Resultados

La industria con los recursos que dispone deberá producir cuatro puertas metálicas del modelo P1 y ocho puertas del modelo P2 por día, a fin de obtener una utilidad máxima de 1 600 dólares.

Caso 2: Un taller artesanal fabrica cinturones de cuero, en cada cinturón A de alta calidad gana $ 4 y en cada cinturón B de calidad media gana 3 dólares. El taller puede producir 500 cinturones de tipo B o 250 de tipo A. Solo se dispone de cuero para 400 cinturones diarios de A y B combinados, de 200 hebillas elegantes para cinturones A y de 350 hebillas diarias para cinturones B. ¿A qué producción debe llegar la artesanía para maximizar sus ganancias?

1. Formulación del problema:

Función objetivo

$Z_{Max} = 4x_1 + 3x_2$

2. Sujeto a:

Restricciones

Recursos	Consumo			Disponibilidad	
Capacidad	$2x_1$	+	$1x_2$	$\leq$	500
Cuero	$1x_1$	+	$1x_2$	$\leq$	400
Hebillas A	$1x_1$	+	$0x_2$	$\leq$	200
Hebillas B	$0x_1$	+	$1x_2$	$\leq$	350

Tabla 2.3. Restricciones caso 2.

3. No negatividad de las variables

$x_1; x_2 \geq 0$

4. Resolución

Las inecuaciones transformamos a ecuaciones y tenemos:

1.) $2x_1 + 1x_2 = 500$

2.) $x_1 + x_2 = 400$

3.) $x_1 = 200$

4.) $x_2 = 350$

Desarrollo

1.) $2x_1 + 1x_2 = 500$

$x_2 = \frac{500}{1}$

x_2 =500, al remplazar en la ecuación y tenemos

$2x_1 = 500$

$x_1 = 250$

Puntos extremos de las ecuaciones:

Ecuación 1

x1	x2
0 250	500 0

Ecuación 2

x1	x2
0 400	400 0

$x_1 + x_2 = 400$

$x_1 = 400$

Ecuación 3

x1	x2
200	0

Ecuación 4

x1	x2
	350

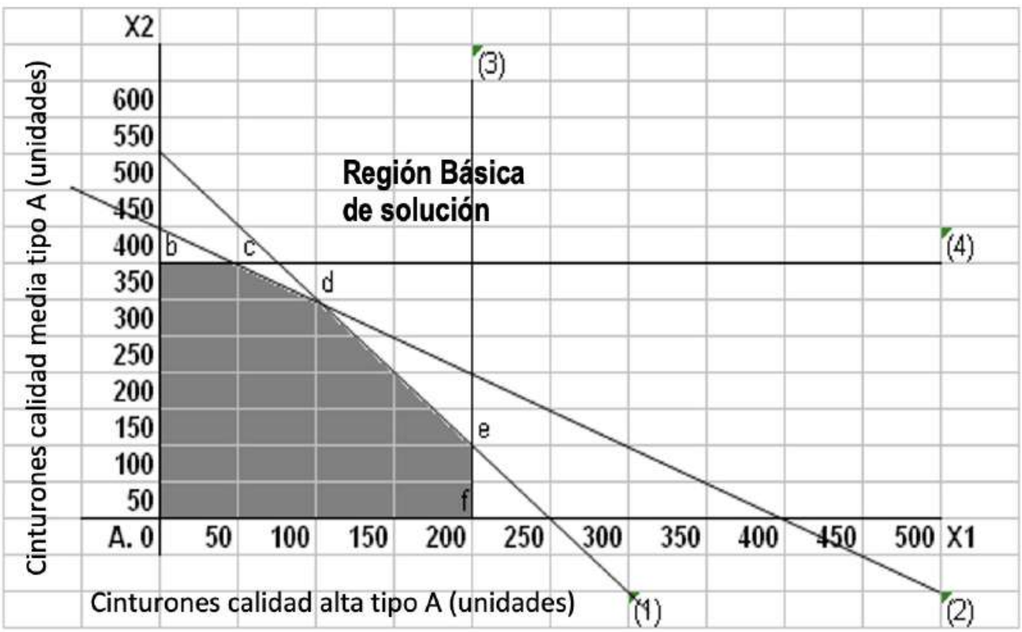


Figura 2.3. Solución gráfica problema fabrica cinturones.

Resolución de las ecuaciones:

Interceptas 1,3(C)

$$x_1 + x_2 = 400 \qquad\qquad x_1 + 350 = 400$$
$$x_2 = 350 \qquad\qquad x_1 = 50$$

Donde C, asume los valores de (50, 350)

Interceptas 1, 4 (D)

$$x_1 + x_2 = 400 \qquad\qquad x_1 + x_2 = 400$$
$$2x_1 + x_2 = 500 \qquad\qquad -2x_1 - x_2 = -500 \Rightarrow -x_1 = -100$$

o

o

$x_1 = 100$ remplazamos en la primera ecuación

$$100 + x_2 = 400$$
$$x_2 = 400 - 100$$
$$x_2 = 300 \Rightarrow$$ **(100,300)** es el punto de solución

Interceptas 2,4 (E)

$$x_1 = 200$$
$$2x_1 + x_2 = 500$$
$$2 * 200 + x_2 = 500$$
$$x_2 = 100$$

Punto E = **(200,100)**

Los puntos de solución los llevamos a la tabla de optimalidad donde verificaremos donde se encuentra el punto óptimo.

Tabla de optimalidad

Puntos de optimalidad		Función Objetivo $Z_{Max} = 4x_1 + 3x_2$	Utilidad	Solución
x_1	x_2			
0	350	0 + 1 050	1 050	
50	350	200 + 1 050	1 250	
100	**300**	**400 + 900**	**1 300**	**Punto Óptimo**
200	100	800 + 300	1 600	
200	0	800 + 0	800	

Tabla 2.4. Tabla de optimalidad.

Solución

La artesanía debe llegar a producir y vender 100 correas tipo A y 300 correas tipo B por día para obtener una ganancia máxima de 1 300 dólares.

Caso 3: CREDIMUEBLE produce dos tipos de muebles A y B, dispone de taller de tornamiento el mismo que puede procesar 25 unidades/hora de A y 40 unidades/hora de B, siendo el costo por hora de $ 20, el taller de rectificación que puede procesar 28 unidades/hora de A y 35 unidades/hora de B y su costo es de $ 14, el taller de pintura puede atender a 35 un/h de A y 25 unidades/hora de B y su costo es de $ 17,5. El precio de venta de A es de $ 5 y el de B $ 4. ¿Cuántas unidades de A y B debe producir para obtener la máxima ganancia?

1. Formulación del problema:

Matriz de recursos

La matriz de recursos se detalla en la tabla 2.5.

	A	**B**	**Tipo de muebles**	
	X_1	**X_2**	**N° de unidades**	
Taller	**Proceso**		**Capacidad**	**Costo ($)**
Tornamiento	25	40	1	20
Rectificación	28	35	1	14
Pintura	35	25	1	17,5

Tabla 2.5. Matriz de recursos.

En este caso, cuando no hay disponibilidad de capacidad, se habla de una capacidad del 100%, que se representa por 1, es decir, que cada taller es ocupado tanto en A como en B en un porcentaje de su presentación en forma de fracción, lo que se verá expresado en las restricciones a las que están sujetas el presente ejercicio.

Para encontrar la utilidad le restamos del precio el costo unitario del bien, en el caso de que este no lo tengamos a disposición, hallamos el costo total unitario de cada producto.

Costo Unitario de los Bienes

En la tabla 2.6. se visualiza el costo unitario de los dos tipos de muebles A y B.

A	B	Precio de venta
$20 \div 25 = 0{,}8$	$20 \div 40 = 0{,}5$	A=5
$14 \div 28 = 0{,}14$	$14 \div 35 = 0{,}4$	
$17{,}5 \div 35 = 0{,}5$	$17.5 \div 25 = 0{,}7$	B = 4
Costo = 1,8	**Costo =1,6**	

Tabla 2.6. Costo unitario de los bienes.

Utilidad

La Utilidad está dada por la diferencia entre el precio de venta (PV)y los costos totales (CT), que para el caso de estudio se tiene:

$UA = PVA - CTA$ $\qquad$ $UB = PVB - CTB$

$UA = 5 - 1{,}80 = 3{,}2$ $\qquad$ $UB = 4 - 1{,}60 = 2{,}40$

1. Función Objetivo

$$Z_{Max} = 3{,}2x_1 + 2{,}4x_2$$

2. Sujeto a:

Restricciones

$$\frac{1}{25}x_1 + \frac{1}{40}x_2 \leq 1$$
$$\frac{1}{28}x_1 + \frac{1}{35}x_2 \leq 1$$
$$\frac{1}{35}x_1 + \frac{1}{25}x_2 \leq 1$$

3. No negatividad de las variables

$x_1, x_2 \geq 0$

4. Resolución

Transformamos las desigualdades fraccionarias en igualdades enteras para lo cual buscamos el mínimo común denominador.

$8x_1 + 5x_2 = 200$

$5x_1 + 4x_2 = 140$

$5x_1 + 7x_2 = 175$

Solución gráfica

X1	X2
0	40
25	0

X1	X2
0	35
28	0

X1	X2
0	25
35	0

Con lo cual se genera la figura 2.4.

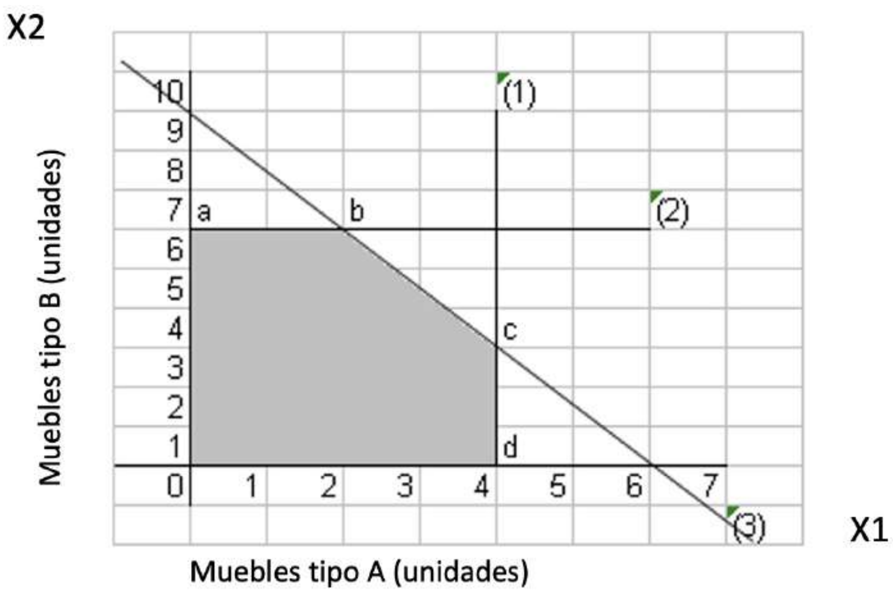


Figura 2.4. Solución gráfica Credimueble.

Consideramos el punto C (Ecuaciones 1 y 3)

$$8x_1 + 5x_2 = 200$$
$$5x_1 + 7x_2 = 175$$
$$(7)\quad 56x_1 + 35x_2 = 1\,400$$
$$(-5)\ -25x_1 - 35x_2 = -875$$
$$31x_1 = 525$$
$$x_1 = \frac{525}{31}$$
$$x_1 = 16{,}93$$

$$8(16{,}93) + 5x_2 = 200$$
$$135{,}44 + 5x_2 = 200$$
$$5x_2 = 200 - 135{,}44$$
$$5x_2 = 64{,}56$$
$$x_2 = \frac{64{,}56}{5}$$
$$x_2 = 12{,}91$$

C (16,93; 12,91) (Se consideran valores enteros) C (17,13)

$Z_{Max} = 3{,}2(17) + 2{,}4(13)$

$Z_{Max} = 85{,}60$

Solución óptima

CREDIMUEBLE, deberá producir y vender, 17 muebles de tipo A y 13 unidades del mueble tipo B para lograr una utilidad máxima de 85,60 por día.

Caso 4: INDAVID (aluminio y vidrio) desea incursionar en la fabricación de dos nuevos productos: puertas de vidrio con marco de aluminio (producto 1) y ventanas con marco de madera (producto 2). La empresa tiene tres plantas: los marcos y molduras de aluminio se hacen en la planta 1; los marcos de madera se fabrican en la planta 2; y, en la planta 3 se corta el vidrio y se ensamblan los productos. Los productos se fabrican en lotes de 20 unidades.

Un equipo de investigación de operaciones determinó que: Un lote del producto 1 requiere de 1 hora en la planta 1, 0 horas en la planta 2 y de 3 horas en la planta 3; un lote del producto 2 requiere de 0 horas en las plantas 1 y de 2 horas en las plantas 2 y 3. El tiempo de producción disponible por semana es de 4, 12 y 18 horas para las plantas 1, 2 y 3 respectivamente (el resto del tiempo se dedica a la fabricación de otros productos). El producto 1 genera una utilidad de $ 3 por lote y el producto 2 genera una utilidad de $ 5 por lote.

La gerencia pide que se determine qué tasas de producción (el número de lotes del producto 1 y el número de lotes del producto 2), se deben fabricar con el objeto de maximizar las utilidades, sujetándose a las restricciones impuestas por las capacidades de producción disponibles en las tres plantas. Se permite cualquier combinación de tasas de producción que satisfaga estas restricciones, incluyendo no producir uno de los productos y todo lo que sea posible del otro.

1. Formulación del problema:

Función Objetivo

Maximizar

$Z_{Max} = 3 * 1 * 5 * 2$

2. Sujeto a:

Restricciones

Para el problema se identifican tres restricciones que vienen dadas por el tiempo de producción disponible por semana en cada planta, tomando en cuenta el tiempo que utiliza cada producto.

$x_1 \leq 4$	Tiempo de producción en la planta 1
$2x_2 \leq 12$	Tiempo de producción en la planta 2
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$	Tiempo de producción en la planta 3

3. No negatividad de las variables

$x_1 \geq 0$	Restricción de no negatividad para X1
$x_2 \geq 0$	Restricción de no negatividad para X2

Variables de decisión y parámetros. - En la función objetivo y en las restricciones anteriores X1 y X2 representan el número de unidades del producto 1 y producto 2 que deben producirse. La utilidad que genera un lote del producto 1 ($3); el tiempo que utiliza un lote del producto 1 en la planta 1 (una hora) y el tiempo disponible en la planta 1 (4 horas), son ejemplos de parámetros.

Recordemos que la formulación de problemas de Programación Lineal, consiste en traducir el objetivo y las restricciones del problema en un conjunto de relaciones matemáticas a las que se denomina Modelo matemático. Para el problema en cuestión, el modelo es el siguiente:

Maximizar $U = 3x_1 + 5x_2$

Sujeta a:

$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

4. Resolución

$Z_{Max} = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$x_1 = 4$

$2x_2 = 12$

$3x_1 + 2x_2 = 18$

X1	X2
4	0

X1	X2
0	$2x2 = 12$ $x2 = \frac{12}{2}$ $x2 = 6$

X1	X2
0	$2x2 = 18$ $x2 = \frac{18}{2}$ $x2 = 9$

X1	X2
$3x1 = 18$ $x1 = \frac{18}{3}$ $x1 = 6$	0

Punto B (2,3)

$$\begin{array}{rrl} & -2x_2 & = 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & = 18 \\ \hline 3x_1 & & = 18 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{18}{3}$$

$$\boxed{x_1 = 6}$$

$$2x_2 = 18 - 6$$

$$x_2 = \frac{12}{2}$$

$$\boxed{x_2 = 6}$$

Punto C (1,3)

$$\boxed{x_1 = 4}$$ Reemplazamos en (3)

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$3(4) + 2x_2 = 18$$
$$12 + 2x_2 = 18$$
$$2x_2 = 18 - 12$$
$$2x_2 = 6$$
$$x_2 = \frac{6}{2}$$

$$\boxed{x_2 = 3}$$

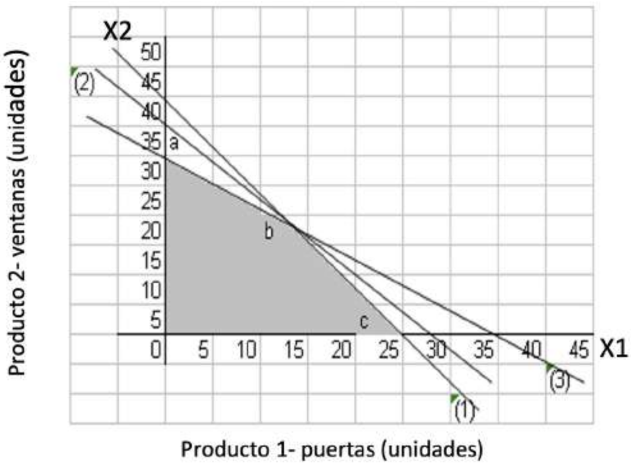


Figura 2.5. Solución gráfica INDAVID.

x1	x2	3x1 + 5x2		Solución
2	6	2x3 + 6x5	36	Punto Óptimo
4	3	4x3 + 3x5	27	

Resultados

Se determina que la tasa de producción (el número de lotes del producto 1 y el número de lotes del producto 2), se deben fabricar 2 y 6 respectivamente con el objeto de obtener una utilidad máxima de 36 dólares de utilidad por día.

2.4.2 Problemas de minimización

Al tratarse de los casos en que la empresa desee minimizar los costos se deberá utilizar la expresión ≥ (mayor/igual), en este caso la región básica factible se encontrara de las intercepciones de las ecuaciones en el plano hacia fuera.

Caso 5: Industrias Chimborazo produce dos clases de hornos a gas. La elaboración de una unidad de horno tipo A, lleva $ 40 de mano de obra y $ 30 un horno de tipo B; en materia prima una unidad de tipo A consume $ 80, mientras que una unidad de tipo B se lleva $ 20. El desgaste de equipo se supone proporcional a la producción y se ha estimado en $ 10 por cada unidad del tipo Ay $ 20 por cada unidad de B. El costo por cada artículo producido es de $ 800 para el tipo A y $ 700 para el tipo B. La industria dispone por lo menos de: $ 1 200 para salarios, $ 1 600 para materia prima y se desea que el desgaste de equipo sea un mínimo de $ 400. ¿Cuál es la cantidad que se debe producir de cada artículo para que los costos sean los mínimos posibles?

1. Formulación del problema

	Mano de Obra ($)	Materia Prima ($)	Desgaste ($)	Costo ($)
TIPO A	40	80	10	800
TIPO B	30	20	20	700
Disponibilidad	1 200	1 600	400	

Tabla 2.7. Datos problema Industrias Chimborazo.

Función Objetivo

Minimizar

$Z_{Min} = 800x_1 + 700x_2$

2. Sujeto a:

Restricciones

$40x_1 + 30x_2 \geq 1\ 200$

$80x_1 + 20x_2 \geq 1\ 600$

$10x_1 + 20x_2 \geq 400$

3. No negatividad de las variables

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

4. Resolución

Solución gráfica

Ecuación 1		Ecuación 2		Ecuación 3	
X1	**X2**	**X1**	**X2**	**X1**	**X2**
0	$30X_2 = 1\,200$ $X_2 = \frac{1\,200}{30}$ $X_2 = 40$	0	$20X_2 = 1\,600$ $X_2 = \frac{1\,600}{20}$ $X_2 = 80$	0	$20X_2 = 400$ $X_2 = \frac{400}{20}$ $X_2 = 20$
$40X_1 = 1\,200$ $X_1 = \frac{1\,200}{40}$ $X_1 = 30$	0	$80X_1 = 1\,600$ $X_1 = 1\,600$ $X_1 = 80$ $X_1=20$	0	$10X_1 = 400$ $X_1 = 400$ $X_1 = 10$ $X_1 = 40$	0

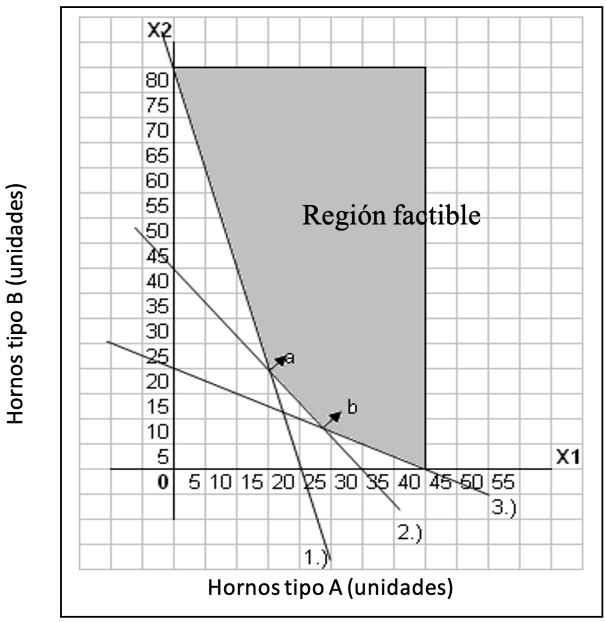


Figura 2.6. Solución gráfica Industrias Chimborazo.

Punto b. (2,3)

$$
\begin{aligned}
\text{-2)}\ 40x_1 + 30x_2 &= 1\,200\\
80x_1 + 20x_2 &= 1\,600\\
\hline
-80x_1 - 60x_2 &= -2\,400\\
80x_1 + 20x_2 &= 1\,600\\
\hline
-40x_2 &= -\ 800
\end{aligned}
$$

$$x_2 = \frac{-800}{-40}$$

$$x_2 = 20$$

$$x_2 = 20 \text{ reemplaza (2)}$$

$$80x_1 + 20(20) = 1\,600$$

$$80x_1 = 1\,600 - 400$$

$$x_1 = \frac{1\,200}{80}$$

$$x_1 = 15$$

$$
\begin{aligned}
80x_1 + 20x_2 &= 1\,600\\
\text{(-1)}\ 10x_1 + 20x_2 &= 400\\
70x_1 \qquad &= 1\,200
\end{aligned}
$$

$$x_1 = \frac{1\,200}{70}$$

$$x_1 = 17 \text{ reemplaza en 1}$$

$$80(17) + 20x_2 = 1\,600$$

$$20x_2 = 1\,600 - 1360$$

$$x_2 = \frac{240}{20}$$

$$x_2 = 12$$

X1	X2	$80x_1 + 700x_2$	Costo	Solución
15	20	80(15) + 700(20)	26 000	
17	12	800(17) + 700(12)	22 000	Punto Óptimo

La cantidad que se debe producir de cada artículo es de 17 unidades del primero y 11 del segundo para que los costos sean de 22 000 los mínimos posibles.

2.4.3 Problemas combinados

Analizados los métodos de maximización y minimización, podemos determinar que estos pueden combinarse, es decir habrá casos donde se presenten restricciones de características (≤) maximización y (≥) minimización, esta situación lleva a especificar y reducir el área factible del problema como se muestra en la figura 2.7.

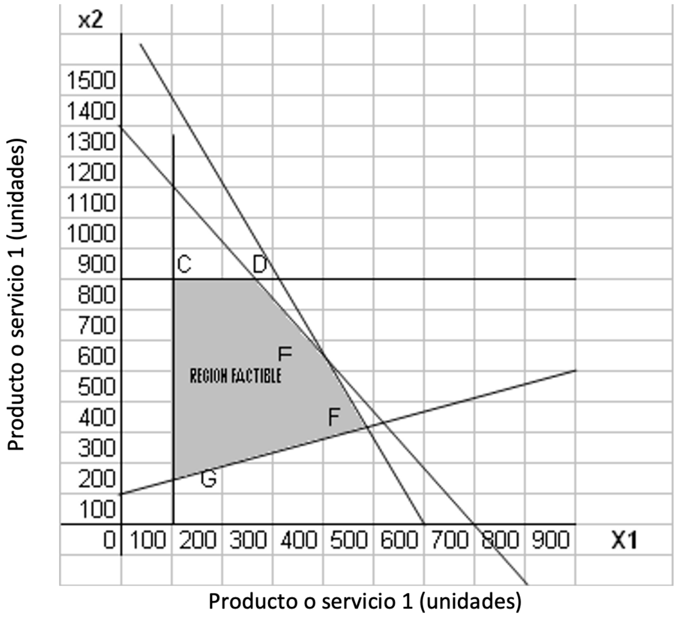


Figura 2.7. Razonamiento lógico problemas combinados.

Los ejercicios se resuelven como ejercicios de maximización, es decir se buscará maximizar los beneficios.

Caso 6: ARTEFACTA desea realizar una campaña de publicidad para promocionar la nueva línea blanca y llegar a dos tipos de clientes. Amas de casa con ingresos superiores a 2 mil dólares y amas de casa con ingresos inferiores a 2 mil dólares. Se considera que las personas del primer grupo comprarán dos veces el producto que las personas del segundo grupo, y el objetivo de ARTEFACTA es maximizar las compras. Se puede anunciar el producto por radio y televisión. Una propaganda en televisión cuesta 250 dólares mensualmente y llega aproximadamente a 1mil personas del primer grupo y 4 mil del segundo grupo. Una unidad de publicidad en radio cuesta 80 dólares mensuales y llega aproximadamente a 3 mil personas del primer grupo y a 1 mil personas del segundo grupo. Hay que usar al menos 3 unidades de Televisión y 6 unidades de radio respectivamente, la política de ARTEFACTA es no gastar más de 2 mil dólares.

1. Formulación del problema:

1er Grupo		2do Grupo	
Tv	Radio	Tv	Radio

Función Objetivo

Maximizar

$$Z_{Max} = (2(1) + 1(4))x_1 + (1(3) + 1(1))x_2$$

$$Z_{Max} = 6x_1 + 4x_2$$

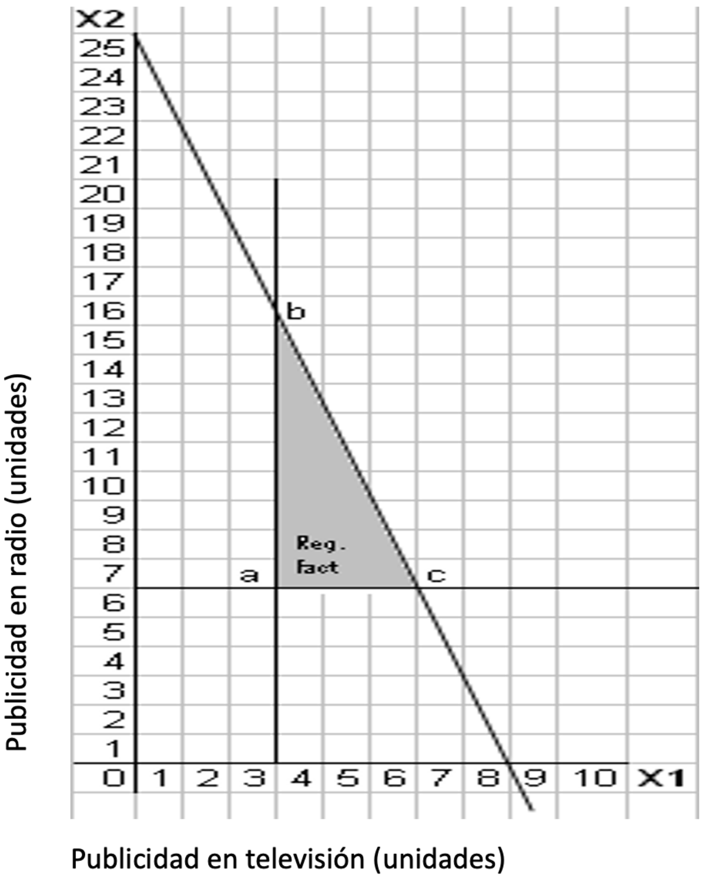


Figura 2.8. Solución gráfica Artefacta.

2. Sujeto a:

Restricciones

$x_1 \geq 3$

$x_2 \geq 6$

$250x_1 + 80x_2 \leq 2\ 000$

3. No negatividad de las variables

$x_1, x_2 \geq 0$

4. Resolución

$Z_{Max} = 6x_1 + 4x_2$

$x_2 = 6$

$250x_1 + 80x_2 = 2\ 000$

Puntos solución:

Punto a = $x_1 = 3, x_2 = 0$

Punto b= $x_1 = 0, x_2 = 6$

Punto c = $x_1 = 8, x_2 = 25$

$x_1 = 0$

$80x_2 = 2\ 000$

$x_2 = \frac{2\ 000}{80}$

$x_2 = 25$

Cuando $x_2 = 0$

$250x_1 = 2\ 000$

$x_1 = \dfrac{2\ 000}{250}$

$x_1 = 8$

Solución

Punto a (3,6), Punto b (3,16), Punto c (6,6)

Comprobación:

Punto a (1,2) de donde ecuación 1: $x_1 = 3$ y ecuación 2: $x_2 = 6$

Punto b (1,3) de donde ecuación 1: $x_1 = 3$ y ecuación 3: $250x_1 + 80x_2 = 2\ 000$

De donde x_1 remplazamos en la ecuación 3 y tenemos:

$250(3) + 80x_2 = 2\ 000$

$750 + 80x_2 = 2\ 000$

$80x_2 = 2\ 000 - 750$

$x_2 = \dfrac{1\ 250}{80}$

$x_2 = 16$

Punto c = (2,3) de donde la ecuación dos ($x_2 = 6$) remplazamos en tres y tenemos:

$250x_1 + 80(6) = 2\ 000$

$250x_1 = 2\ 000 - 480$

$250x_1 = 1\ 520$

$x_1 = \dfrac{1\ 520}{250}$

$x_1 = 6$

Punto Óptimo

Puntos			Función Objetivo	Solución	
X1		X2	6x1 + 4x2		
Pa	3	6	18 + 24	42	**Punto Óptimo**
Pb	**3**	**16**	**18 + 64**	**82**	
Pc	6	6	36 + 24	60	

Tabla 2.9. Punto óptimo Artefacta.

El objetivo de ARTEFACTA se cumple utilizando 3 publicidades en televisión y 16 en radio llegando a un total máximo de 82 000 clientes que podrían realizar sus compras de línea blanca.

2.4.4 Análisis de sensibilidad

a.) Restricciones

La búsqueda de la solución de un modelo de decisión es sólo el primer paso del análisis. También es importante que el gerente comprenda cuán sensible es la solución a los cambios en las suposiciones y a los factores exógenos. Esto también se aplica a los modelos de programación lineal, y una de las características agradables de los modelos de programación lineal es que gran parte de este análisis de sensibilidad proviene directamente de la solución del problema. Primero veremos estos conceptos en forma gráfica y después por medio de la interpretación de las salidas de los programas de computación que se usan para resolver problemas de programación lineal.

b.) Precios Duales

Considere a ecuación de restricción para la máquina 1, que especifica un máximo de 24 horas disponibles. En términos de la programación lineal, este límite de la capacidad con frecuencia se denomina valor del término independiente o segundo miembro de la restricción (o sencillamente b_i).

Precios duales para las restricciones de no negatividad son una herramienta importante para determinar los valores marginales asociados con la inclusión de al menos una unidad adicional de una variable de decisión en la solución. Es fundamental recordar que las restricciones de no negatividad se expresan como $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ en este contexto.

Cuando decidimos incluir una unidad adicional en la solución, estamos efectivamente modificando una restricción de no negatividad a $x_1 \geq 1$ o $x_2 \geq 1$, dependiendo de la variable que se esté considerando. Los valores marginales relacionados con esta modificación se conocen como "costos reducidos".

Utilización de precios duales

Los precios duales tienen muchas aplicaciones empresariales. Aunque en el mundo existen restricciones y limitaciones, la mayoría de ellas no son absolutas. Por ejemplo, el gerente que formuló el problema de programación lineal determinó las horas disponibles en cada una de las máquinas en circunstancias normales, pero podría obtener horas adicionales con trabajo en tiempo extra, comprando equipo adicional o reprogramando otras actividades. Los precios duales indican si vale la pena hacerlo y con qué margen, y así ayudan a identificar los cuellos de botella clave. En nuestro ejemplo, el gerente sabe que vale el doble (dos dólares en lugar de uno) obtener horas adicionales para la máquina 1 que para la máquina 2.

Un precio dual representa el valor marginal asociado con un cambio unitario en el término independiente de una restricción. Un costo reducido representa el valor marginal de introducir en la solución una unidad de una variable de decisión. Los costos reducidos se pueden considerar como precios duales de las restricciones de no negatividad. Si una restricción n es efectiva, su precio dual es cero.

Intervalo de variación del término independiente

Los precios duales proporcionan el valor marginal de la realización de un cambio pequeño en el límite de una restricción (es decir, el valor del término independiente), pero sería un error creer que estos valores serían los mismos si la capacidad se cambiará en forma arbitraria. Se llega a un punto en el cual la capacidad adicional es excesiva y no tiene valor; por lo tanto, hay límites con respecto al intervalo de capacidad en el cual se mantienen los valores marginales.

c.) Evaluación de nuevos productos

Los precios duales pueden servir para identificar cuellos de botella o restricciones costosas, que se pueden modificar de manera rentable. Los precios duales también pueden ser útiles para evaluar productos nuevos.

Para todas las restricciones afectadas. Si el costo de oportunidad es menor que el beneficio por unidad del nuevo producto, entonces éste es rentable y debe incluirse en la solución óptima. Si el costo de oportunidad es mayor que el beneficio por unidad, entonces no debe fabricarse el producto.

d.) Coeficientes de la función objetivo

Un gerente puede interesarse por lo que puede suceder con la solución de un problema de programación lineal si cambia uno de los coeficientes de la función objetivo, por ejemplo, debido a un aumento en el precio de la materia prima. Se puede efectuar un análisis gráfico similar al que se hizo para los cambios en los coeficientes del término independiente.

Ejemplo: Supóngase que, en dos beneficios, el primero permanece fijo durante un semestre y el segundo tiene una variación, esto provocará de igual manera una variación en la solución óptima, si esto sucede en constante incremento del precio podrá provocar el cambio del punto óptimo de A a B o a C.

2.4.5 Método simplex (MS)

1. La forma estándar

La mayoría de los problemas de PL son demasiado grandes, es decir, contienen más de dos variables de decisión como para resolverlos por el método gráfico. El método algebraico más ampliamente utilizado es el denominado Método Simplex (MS). Para resolver un problema de PL por el método simplex, primero hay que ponerlo en su forma estándar o aumentada. Para toda restricción del tipo ≤ se adiciona una variable de holgura (H); para cada restricción del tipo ≥, se resta primero una variable de excedente (E) y luego se suma una variable artificial (A); y, para cada restricción del tipo =, se suma una variable artificial únicamente. En la función objetivo también se incluyen estas variables con coeficientes de 0 para las variables de holgura y de excedente. Las variables artificiales llevarán un coeficiente cualquiera pero pequeño para problemas de maximización o un coeficiente cualquiera pero grande para un problema de minimización. Esto se explica para cada tipo de problema, más adelante.

2. La tabla simplex

Para condensar los cálculos matemáticos, la forma estándar se representa en forma de tabla.

	Cj		**C1**	**C2**	**C3...**	**Cn**	**bi/aij**
CVB	Base	bi	X1	X2	H1...	Hn	
0 0 0 . . . 0	H1 H2 H3 . . . Hi	b1 b2 b3 . . . bi	A11° A21° A31° . . . ai1°	a12 a22 a32 . . . ai2	a13... a23... a33... . . . ai3...	afj a2j a3j . . . Aij	b1/a11
	Zj						
	Zj - Cj						

Tabla 2.10. Tabla simplex para un problema de Programación Lineal.

El significado de la simbología se indica a continuación:

i = Ecuaciones lineales (restricciones).

j = Variables

aij = Coeficientes correspondiente a la variable j de la restricción i.

Cj = Coeficientes de la función objetivo para la variable j. Especifican la contribución a las utilidades por unidad. Los coeficientes se transfieren en forma directa de la función objetivo.

CVB = Son los coeficientes de la función objetivo para las variables básicas del momento.

Base = Contiene las variables básicas del momento. Se utiliza el término base para referirse al conjunto de variables básicas que conforman la solución factible.

bi = Columna de los valores de las variables básicas. Valor del lado derecho para la restricción i en la tabla simplex inicial cuando las variables de decisión son iguales a cero (solución básica factible inicial).

Fila Zj.- Valores de la función objetivo. Valores que va formando la FO en cada etapa.

Zj-Cj.- Fila de evaluación neta. Representa el cambio neto en el valor de la FO. Contribución neta por cada unidad que se fabrica.

bi/aij.- Cociente para determinar las variables que sale de la base (condición de factibilidad).

Matriz a.- m filas y n columnas de los coeficientes de las variables en las ecuaciones de restricción.

* = Elemento pivote

° = Elemento semipivote

H = Variable de holgura

3. Problema de maximización

Ejercicio

Resuelva este problema primero por el método gráfico para que vaya haciendo el seguimiento del método simplex. El método simplex o algoritmo del MS, se resume en los siguientes pasos:

1.- Desarrollar el modelo. El modelo para el problema planteado es el siguiente:

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$x_1 \leq 4$ Tiempo disponible en la planta 1

$2x_2 \leq 12$ Tiempo disponible en la planta 2

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$ Tiempo disponible en la planta 3

$x_1, x_2 \geq 0$

2.- Estructurar la presentación en forma estándar. Como todas las restricciones son del tipo = sumamos una variable de holgura a cada una de las restricciones.

Forma estándar del modelo, similar a la fórmula 2.1, con la incorporación de variables de holgura.

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2 + 0H1 + 0H2 + 0H3$

Sujeto a:

$x_1 + H1 = 4$

$2x_2 + H2 = 12$

$3x_1 + 2x_2 + H3 = 18$

$x_1, x_2, H1, H2, H3 \geq 0$

3.- Estructurar la presentación en forma de tabla. Consiste en poner la forma estándar en forma de tabla como se indica a continuación. A la base van las variables de holgura (variables básicas), en la columna CVB van los coeficientes de las variables de holgura de la función objetivo y a la columna bi van el valor de los lados derechos de las restricciones. La matriz se llena con los aij. Analice la tabla siguiente y compárela con la forma estándar del modelo.

Tabla simplex inicial

	Cj		**3**	**5**	**0**	**0**	**0**	**bi/aij**
CVB	Base	Bi	X1	X2	H1	H2	H3	
0	H1	4	1	0	1	0	0	
0	H2	12	0	2	0	1	0	
0	H3	18	3	2	0	0	1	
	Zj							
	Zj - Cj							

Tabla 2.11. Tabla simplex inicial.

4.- Calcular el valor de la fila *Zj*.- Suma de los productos que se obtienen de multiplicar los elementos de la columna CVB por los correspondientes elementos de la columna *bi* y *aij* de la *j*-ésima columna de la matriz A. los valores de fila *Zj* correspondientes a las columnas *bi*, x_1, x_2, $H1$, $H2$ y $H3$ son los siguientes.

$0x_4 + 0x_{12} + 0x_{18} = 0;$ (este es el valor de la utilidad, *Zj*)

$0x_1 + 0x_0 + 0x_3 = 0$;

$0x_0 + 0x_2 + 0x_2 = 0$;

$0x_1 + 0x_0 + 0x_0 = 0$;

$0x_0 + 0x_1 + 0x_0 = 0$;

$0x_0 + 0x_0 + 0x_1 = 0$;

La tabla inicial toma la siguiente forma:

Tabla simplex inicial

	Cj		**3**	**5**	**0**	**0**	**0**	**bi/aij**
CVB	Base	bi	X1	X2	H1	H2	H3	
0 0 0	H1 H2 H3	4 12 18	1 0 3	0 2 2	1 0 0	0 1 0	0 0 1	
	Zj	0	0	0	0	0	0	
	Zj - Cj							

Tabla 2.12. Tabla simplex inicial.

5.- Calcular el valor de la fija *Zj* – *Cj*.- Los valores serán los siguientes: 3 – 0 = 3; 5 – 0 = 5; 0 – 0 = 0; 0 – 0 = 0; 0 – 0 = 0. La tabla inicial toma la forma siguiente:

Tabla simplex inicial

	Cj		**3**	**5**	**0**	**0**	**0**	**bi/aij**
CVB	Base	Bi	X1	X2	H1	H2	H3	
0 0 0	H1 H2 H3	4 **12** 18	1 **0** 3	**0°** **2*** 2°	1 **0** 0	0 **1** 0	0 **0** 1	
	Zj	0	0	0	0	0	0	
	Zj - Cj		3	5	0	0	0	

Variable que entra (columna pivote)

Tabla 2.13. Tabla simplex inicial.

Esta tabla da la primera solución al problema, corresponde al origen en la solución gráfica y que puede expresarse de dos formas:

Las variables que están en la base y que en este caso son H1, H2 y H3 tienen valores de 4, 12 y 18 respectivamente, esto se observa en la columna *bi*. Las variables no básicas (que no están en la base) y que en nuestro caso son X1 y X2 tienen valores de cero. La utilidad se la ve en la fila *Zj* columna bi. En nuestro caso es cero.

Esta solución corresponde al punto A del método gráfico. Significa que se producen 0 unidades del producto A y 0 unidades del producto B; los recursos, es decir el tiempo de cada máquina no ha sido utilizado; y, la utilidad es de cero.

Variables Básicas: H1 = 24, H2 = 12, H3 = 18

Variables no básicas: $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$

Utilidad: U = 0

Variables de decisión y variables de holgura. En nuestro caso las variables de decisión son X1 y X2 y como no están en la base tienen valores de cero; y, las variables de holgura que en nuestro caso son H1, H2 y H3 que por estar en la base toman los valores de la columna bi, en este caso 4, 12 y 18 respectivamente. La utilidad es cero.

Variables de decisión: $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$

Variables de holgura: H1 = 4, H2 = 12, H3 = 18

Utilidad: U = 0

6.- Observando la fila de evaluación (última fila de la tabla), elegir la variable que entra a la base. Se elige la variable que ocasione un incremento más alto por unidad en el valor de la función objetivo para el caso de maximización. En el ejemplo que estamos tratando la variable con un coeficiente más alto en la fila de evaluación es x_2. Es como si preguntáramos, qué conviene producir más, el producto 1 (x_1) o el producto 2 (x_2). La respuesta será, el producto que nos proporcione la mayor utilidad, en este caso el producto 2 (tiene como utilidad 5 en contra del producto 1 que tienen como utilidad 3).

7.- Determinar la variable que sale de la base aplicando la prueba del cociente mínimo. Será la que tenga el menor de los cocientes *bi*/*aij* (condición de factibilidad, tanto para problemas de maximización como para los de minimización). Es como si preguntáramos, cuántas unidades del producto 2 se pueden producir con los recursos que se disponen. Para ello dividimos, los recursos disponibles (columna *b*i) para la cantidad de recurso que utiliza cada unidad del producto 2 (columna x_2). No se toman en cuenta los valores cero o valores negativos (que en esta primera tabla no existen). Los valores se anotan en la columna *bi*/*aij* de la tabla anterior. Para el caso presente será 12/2 = 6 que indica que H2 es la variable que sale.

8.- Determinar el elemento pivote (cruce de la fila pivote y columna pivote), 2* para el ejemplo.

9.- Construimos una nueva tabla (segunda tabla simplex mejorada). Los valores de las dos primeras filas nunca cambian. En la base en lugar de H2 que es la variable que sale irá x_2 que es la variable que entra en la base; y en la columna CVB en lugar de 0 (coeficiente de la variable que sale) irá el coeficiente de la variable que entra, en este caso 5. Ver el cambio en la segunda tabla simplex mejorada (parcial).

10.- Calculamos los coeficientes de la fija que entra (fila pivote) a la nueva tabla (fila de X2). Dividimos los coeficientes que tienen la variable que sale (fila de H2) para el pivote. Esto se llama cálculo de tipo 1. Es decir: 12/2 = 6; 0/2 =0; 2/2 =1; 0/2 = 0; 1/2 = 1/2; 0/2 = 0. Ver los valores de la fija X2 en la siguiente tabla.

Segunda tabla simplex mejorada (parcial)

	Cj		**3**	**5**	**0**	**0**	**0**	**bi/aij**
CVB	Base	bi	X1	X2	H1	H2	H3	
0 5 0	H1 X2 H3	6	0	1	0	1/2	0	
	Zj							
	Zj - Cj							

Tabla 2.14. Segunda tabla simplex mejorada (parcial).

11.- Obtenemos los elementos de la fila H1 (cálculo de tipo 2). Utilizamos la siguiente fórmula:

Coeficiente *aij* = Valor anterior – Valor de la nueva fila (calculada en 10) multiplicada por el semipivote correspondiente a la fila que estamos calculando.

¿Cómo calculamos el nuevo valor para la fila de H1?

Coeficiente *aij* = El valor de H1 en la tabla anterior es 4 – el valor de la nueva fila calculada en el numeral 10 que es 6 multiplicada por el semipivote correspondiente a la fila H1 que es 0.

$4 - 6(0) = 4$

Los valores de la fija H1 serán los siguientes, observe que son los mismos de la tabla inicial, esto se da porque el semipivote es cero (0). Tome en cuenta este detalle.

$4 - 6(0) = 4$

$1 - 0(0) = 1$

$0 - 1(0) = 0$

$1 - 0(0) = 1$

$0 - 1/2(0) = 0$

$0 - 0(0) = 0$

Los valores de la fila H3 serán los siguientes:

Coeficiente *aij* = El valor de H3 en la tabla anterior es 18 – el valor de la nueva fila calculada en el numeral 10 que es 6 multiplicada por el semipivote correspondiente a la fila H3 que es 2.

$18 - 6(2) = 6$

$18 - 6(2) = 6$

$3 - 0(2) = 3$

$2 - 1(2) = 0$

$0 - 0(2) = 0$

$0 - 1/2(2) = -1$

$1 - 0(2) = 1$

La segunda tabla simplex parcial mejorada es la siguiente:

Segunda tabla simplex parcial mejorada parcial

	Cj		3	5	0	0	0	bi/aij
CVB	Base	Bi	X1	X2	H1	H2	H3	
0	H1	4	1	0	1	0	0	
5	X2	6	0	1	0	1/2	0	
0	H3	6	3	0	0	−1	1	
	Zj							
	Zj - Cj							

Tabla 2.15. Segunda tabla simplex parcial mejorada parcial.

12.- Determinamos los valores de la fila *Zj* y *Zj − Cj*. (Ver pasos 4 y 5). La forma de la segunda tabla simplex mejorada, será la siguiente.

Segunda tabla simplex mejorada

	Cj		3	5	0	0	0	bi/aij
CVB	Base	Bi	X1	X2	H1	H2	H3	
0	H1	4	1°	0	1	0	0	4/1 = 4
5	X2	6	0°	1	0	1/2	0	
0	H3	6	3*	0	0	−1	1	6/3 = 2
	Zj	30	0	5	0	5/2	0	
	Zj - Cj		3	0	0	-5/2	0	

Nueva variable que entra

Tabla 2.16: Segunda tabla simplex mejorada.

La segunda tabla da la siguiente solución y que corresponde al punto (0,6) del método gráfico:

Variables de decisión: $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$

Variables de holgura: H1 = 4, H2 = 0, H3 = 6

Utilidad: U = 30

13.- Si la fila *Zj – Cj* tienen valores de cero o menores de cero (para el caso de maximización), se termina el proceso iterativo.

Criterio para detener la iteración

Se ha llegado a la solución óptima por el método simplex cuando todos los elementos de la fila de evaluación neta (*Zj – Cj*) son cero o negativos, para problemas de maximización.

14.- Si no se cumple el criterio para detener las iteraciones, se vuelve al paso 6. En nuestro caso no se cumple ya que hay un 3 positivo en la columna X1. Considerando las instrucciones 6 y 7, se determina que la variable que entra es X1 y la variable que sale es H3. La instrucción 8 determina que el elemento pivote para la nueva tabla es 3*. Según las instrucciones 9 y 10, la tercera tabla simplex parcial mejorada será la siguiente.

Tercera tabla simplex parcial mejorada

	Cj		**3**	**5**	**0**	**0**	**0**
CVB	Base	Bi	X1	X2	H1	H2	H3
0 5 3	H1 H2 X1	2	1	0	0	−1/3	1/3
	Zj						
	Zj - Cj						

Tabla 2.17. Tercera tabla simplex parcial mejorada.

15.- Luego de hacer los cálculos correspondientes, la tercera tabla simplex mejorada es la siguiente:

Tercera tabla simplex mejorada

	Cj		**3**	**5**	**0**	**0**	**0**
CVB	Base	Bi	X1	X2	H1	H2	H3
0 5 3	H1 H2 X1	2 6 2	0 0 1	0 1 0	1 0 0	1/3 1/2 −1/3	−1/3 0 1/3
	Zj	36	3	5	0	3/2	1
	Zj - Cj		0	0	0	−3/2	−1

Tabla 2.18. Tercera tabla simplex mejorada.

16.- Según la instrucción 14, el criterio para detener las iteraciones se cumple; por lo tanto, se ha llegado a la tabla final, es decir, a la solución del problema. En esta última se analizan los valores de las variables de decisión, la situación de los recursos o variables de holgura. Compare con las obtenidas por el método gráfico.

La solución al problema se puede dar de dos formas:

a. Variables de decisión: $x_1 = 2$ y $x_2 = 6$

Variables de holgura: H1 = 2, H2 = 0, H3 = 0

Utilidad: U = 36

b. Variables básicas: $x_1 = 2$ y $x_2 = 6$

Variables no básicas: H1 = 2, H2 = 0, H3 = 0

Utilidad: U = 36

El reporte técnico para el gerente será: se deben fabricar 2 lotes del producto 1 (puertas de vidrio con marco de aluminio) y 6 lotes del producto 2 (ventanas con marco de madera) para que la utilidad máxima sea de $ 36. Se utiliza todo el tiempo disponible en las plantas 2 y 3, mientras que en la planta 1 sobran 2 horas.

4. Problemas de minimización

Ejercicio

1.- El problema planteado tienen el siguiente modelo:

Minimizar $Z = 2x_1 + 3x_2$

Sujeto a:

$x_1 + x_2 \geq 350$

$x_1 \geq 125$

$2x_1 + x_2 \geq 600$

$x_1, x_2 \geq 0$

2.- Estructurar la presentación en forma estándar; restamos una variable de excedentes y sumamos una variable artificial a las restricciones primera y segunda y sumamos una variable de holgura únicamente a la tercera restricción.

Forma estándar:

Minimizar $Z = 2x_1 + 3x_2 + 0E1 + 0E2 + 100A1 + 100A2 + 0H3$

Sujeto a:

$x_1 + x_2 - E1 + A1 = 350$

$x_1 - E2 + A2 = 125$

$2x_1 + x_2 + H3 = 600$

$x_1, x_2, E1, E2, A1, A2, A3, H3 \geq 0$

Cuando tenemos restricciones del tipo ≥ tenemos que restarle una variable de excedente para convertir la desigualdad en igualdad. Luego para tener una matriz unidad le sumamos variables artificiales. Las variables artificiales o auxiliares sólo se utilizan para poder iniciar con el método simplex, éstas no significan nada y no deben aparecer en la solución final, salvo casos especiales. Para eliminar de la base estas variables, asignamos a éstas un costo elevado, es decir le asignamos un coeficiente elevado en la función objetivo. En nuestro caso le damos un costo o un valor de 100 a las variables A1 y A2. Si se trata de problemas de maximización donde haya restricciones del tipo ≥, a las variables artificiales le damos un valor muy bajo, incluso negativo.

3.- Presentación en forma de tabla. En este caso las variables que van a la base son las artificiales de la primera y segunda restricción y la de holgura de la tercera restricción. Analice la tabla siguiente y compárela con la forma estándar del modelo.

	Cj		**2**	**3**	**0**	**0**	**100**	**100**	**0**	
CB	Base	b	X1	X2	E1	E1	A1	A2	H3	
100	A1	350	1	1	−1	0	1	0	0	
100	A2	125	1	0	0	−1	0	1	0	
0	H3	600	2	1	0	0	0	0	1	
	Zj									
	Zj – Cj									

Tabla 2.19. Tabla inicial simplex.

4.- Calcular el valor de la fila *Zj*.- Suma de los productos que se obtienen multiplicando los elementos de la columna CVB por los correspondientes elementos *aij* de la *j-ésima* columna de la matriz A. Los valores de fila *Zj* correspondientes a las columnas *bi* y x_1 se calculan de la forma siguiente:

	100(350) = 35 000	100 ∗ 1 = 100
	100(125) = 12 500	100 ∗ 1 = 100
	0(600) = 0	0(2) = 0
costo	47 500	200

Calcule usted los valores para las demás columnas de esta fila.

5.- Calcular el valor de la fila $Zj - Cj$

La tabla 2.20. muestra el resultado de los pasos 4 y 5.

	Cj		**2**	**3**	**0**	**0**	**100**	**100**	**0**	**b/aij**
CB	Base	b	X1	X2	E1	E1	A1	A2	H3	
100	A1	350	1°	1	–1	0	1	0	0	350/1 = 350
100	A2	125	1*	0	0	–1	0	1	0	125/1 = 125
0	H3	600	2°	1	0	0	0	0	1	600/2 = 300
	Zj	47500	200	100	–100	–100	100	100	0	
	Zj – Cj		–198	–97	100	100	0	0	0	

Tabla 2.20. Tabla inicial simplex pasos 4 y 5.

De la tabla anterior se desprende la primera solución básica factible. Esta solución corresponde al origen del método gráfico. Significa que se producen 0 unidades del producto A y 0 unidades del producto B; los recursos no han sido utilizado y, el costo por esta producción hipotética es $ 47 500.

6.- Elegir la variable que entra a la base (variable de entrada). Se elige la variable que ocasione una reducción más alta por unidad en el valor de la función objetivo. En el ejemplo que estamos tratando la variable con un coeficiente más bajo en la fila de evaluación es X1. Es como si preguntáramos, qué conviene producir más, el producto A (x_1) o el producto B (x_2). La respuesta será, el producto que nos proporcione el menor costo, en este caso A (coeficiente – 198).

7.- Determinar la variable que sale de la base (variable de salida). Será la que tenga el menor de los cocientes *bi*/*aij*. Para el caso presente es A2 (125/1) la variable que sale.

8.- Determina el pivote, (cruce de la fila pivote y columna pivote), 1* para el ejemplo.

9.- Construimos una nueva tabla (segunda tabla mejorada). Los valores de las dos primeras filas nunca cambian. En la base en lugar de A2 que es la variable que sale irá x_1 que es la variable que entra a la base; y en la columna CVB en lugar de 100 (coeficiente de la variable que sale) irá el coeficiente de la variable que entra, en ese caso 2.

10.- Calculamos los coeficientes del renglón pivote para la nueva tabla. Cálculo de tipo 1.

11.- Obtenemos los coeficientes de la fila A1 y H3 (cálculo de tipo 2). Utilizamos la misma fórmula dada para el problema de maximización.

12.- Se obtienen los coeficientes de la fila *Zj* (ver paso 4).

13.- Se obtiene los coeficientes de la fila de evaluación neta Zj - Cj (ver paso 5). La tabla simplex mejorada es la siguiente:

	Cj		**2**	**3**	**0**	**0**	**100**	**100**	**0**	**b/aij**
CB	Base	b	X1	X2	E1	E2	A1	A2	H3	
100	A1	225	0	1	−1	1°	1	−1	0	225/1 = 225
100	A2	125	1	0	0	−1°	0	1	0	
0	H3	350	0	1	0	2*	0	−2	1	350/2 = 175
	Zj	22 750	2	100	−100	98	100	−98	0	
	Zj – Cj		0	−97	100	−98	0	198	0	

Tabla 2.21. Segunda tabla simplex mejorada.

Esta segunda tabla da la siguiente solución y que corresponde a un punto extremo de la región factible del método gráfico:

Variables de decisión: $x_2 = 0$ y $x_1 = 125$

Costo: C= 22 750

14.- Si la fila *Zj – Cj* tiene valores de cero o mayores de 0, se termina el proceso iterativo.

Criterio para detener la iteración
Se ha llegado a la solución óptima por el método simplex cuando todos los elementos de la fila de evaluación neta (*Zj – Cj*) son cero o positivos.

15.- Si no se cumple el criterio para detener las iteraciones se vuelve al paso 6.

En nuestro caso este criterio no se cumple. Volvemos al paso 6. Determinamos que las variables que entra es E2 (-98 en la fila de evaluación y la que sale es H3. Siguiendo con los cálculos llegamos a una tercera tabla.

	Cj		**2**	**3**	**0**	**0**	**100**	**100**	**0**	**b/aij**
CB	Base	b	X1	X2	E1	E2	A1	A2	H3	
100	A1	50	0	½*	−1	0	1	0	−1/2	50/0.5 = 100
2	X1	300	1	½°	0	0	0	0	1/2	300/0.5 = 600
0	E2	175	0	½°	0	1	0	−1	1/2	175/0.5 = 350
	Zj	5 600	2	51	−100	0	100	0	−49	
	Zj – Cj		0	−48	100	0	0	100	49	

Tabla 2.22. Tercera tabla simplex mejorada.

Como el criterio no se cumple tenemos necesidad de otra iteración. Usted podrá determinar que la variable que entra es ahora x_2 (–48 en la fila de evaluación) y la que sale es A1. Realizando los cálculos correspondientes llegamos a la siguiente tabla:

	Cj		**2**	**3**	**0**	**0**	**100**	**100**	**0**
CB	Base	b	X1	X2	E1	E1	A1	A2	H3
3	X2	100	0	1	−2	0	2	0	−1
2	X1	250	1	0	1	0	−1	0	1
0	E2	125	0	0	1	1	−1	−1	1
	Zj	800	2	3	−4	0	4	0	−1
	Zj – Cj		0	0	4	0	96	100	1

Tabla 2.23. Tabla simplex final.

16.- El criterio se cumple. La solución al problema es la siguiente, comparar con la solución obtenida por el método gráfico.

Variables de decisión: $x_1 = 250$ y $x_2 = 100$
Variable de holgura: H3 = 0
Variable de excedente: E2 = 125
Costo: C=800

El reporte técnico será el siguiente. Para minimizar los costos de producción se debe fabricar 250 galones del producto A y 100 galones del producto B. Se está produciendo 125 galones más de lo especificado para el producto A ($x_1 = 125$); la producción combinada cumple con lo mínimo establecido ($x_1 + x_2 = 350$). Se utiliza todo el tiempo disponible para la producción y el costo mínimo es de $ 800.

2.4.6 El Problema Dual

Objetivos

- Formular e interpretar modelos de programación dual.
- Explicar la importancia de usar en problemas propios de los negocios, soluciones de programación lineal usando el dual.

Dualidad

Un problema de maximización en programación lineal puede ser asociado con otro problema lineal, pero de minimización, y viceversa.

Esta asociación de los dos problemas se conoce como "DUALIDAD" o "PROBLEMA DUAL".

El estudio del problema dual tiene un interés matemático – económico porque:

- Nos permite entender mejor el método de la programación lineal.
- Puede ayudar a disminuir el tamaño de un modelo lineal; con el consiguiente ahorro de trabajo al resolverlo a través del dual.
- Es una herramienta adicional para realizar los análisis post-óptimos.
- Complementa y da una fácil interpretación económica de las variables, coeficientes de la función objetiva y términos independientes de las restricciones.

Empezaremos estableciendo las características duales, luego la expresión matemática de ellas, para pasar luego a las aplicaciones más sobresalientes.

Definiremos como problema "PRIMAL o PRIMARIO" al modelo matemático que tenemos como punto de partida; y problema "DUAL" al que surge por asociación con el anterior.

Características principales de la dualidad

a) Si el primal implica maximización, el dual es minimización, y viceversa.

b) Los coeficientes de la función objetivo del dual están formados por los términos independientes de las restricciones del primal.

c) El dual tiene restricciones como variables tiene el primal.

d) Si las restricciones del primal son del tipo ≥, las restricciones del dual serán del tipo ≤ y viceversa.

e) Los términos independientes del cual están formados por los coeficientes de la función objetivo del primal.

f) El coeficiente de la variable *j-ésima* en la restricción *j-ésima* del primal se transforma en el coeficiente de la variable *j-ésima* de la restricción *j-ésima* de la restricción *j-ésima* del dual.

"Máximo del primal = Mínimo del dual"

Por lo tanto, el primal puede ser un caso de maximización o de minimización y el dual de un dual no es otra cosa que su primal.

En el lenguaje matemático las relaciones anteriores se expresarían como:

PRIMAL	DUAL
Función Objetivo $Max: = Z = \sum_{j=1}^{p} C_j\ X_j$ (fórmula 2.4) Restricciones $\sum_{j=1}^{p} A_{ij}\ X_j \leq b_i$ (fórmula 2.5) i = (1,2,3, ...n) $X_j \geq 0$ (fórmula 2.6) j = (1,2,3, ...p) p = Número de variables principales.	Función Objetivo $Min: = Z = \sum_{j=1}^{p} b_i\ Y_i$ (fórmula 2.4) Restricciones $\sum_{j=1}^{p} A_{ji}\ Y_I \geq C_j$ (fórmula 2.5) j = (1,2,3, ...p) $Y_i \geq 0$ (fórmula 2.6) i = (1,2,3, ...n) n = Número de Variables principales.
X_j = Variables primales Y_j = Variables duales	

Tabla 2.24. Cuadro comparativo sistema primal y dual.

Ejercicios Ilustrativos

Dados los siguientes primales escribir sus duales respectivos.

1) Problema Primal:

$Z_{Max} = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3$

Restricciones

$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 16$

$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 25$

$x_J \geq 0$

El dual será

Siendo la función objetivo del primal de maximización, entonces la del dual será minimización.

Los términos independientes del primal pasan a ser los coeficientes de la función objetivo del dual:

$Z_{MIin}= 16Y_1 + 25Y_2$

Para formar las restricciones del dual tomamos los coeficientes de las restricciones del primal en sentido vertical:

$Y_1 + 7Y_2$

$Y_1 + 5Y_2$

$2Y_1 +3\ Y_2$

$Y_j \geq 0$

Los términos independientes de las restricciones del dual son los coeficientes de la función objetivo del primal:

Restricciones del dual:

$Y_1 + 7Y_2 \geq 4$

$Y_1 + 5Y_2 \geq 5$

$2Y_1 + 9Y_2 \geq 9$

$Y_j \geq 0$

Se ha planteado el problema dual pero no se ha resuelto, para hallar el valor de las variables del dual, es necesario el método simplex.

Nota: Para encontrar el dual es necesario que todas las restricciones del primal tengan el mismo sentido, es decir que el signo de las desigualdades sea el mismo.

2) **Primal;**

$Z_{Min} = 2x_1 + 3x_2$

Restricciones:

$x_1 + x_2 \geq 130$

$2x_1 + x_2 \geq 190$

$x_1 + 3x_2 \geq 200$

$x_j \geq 0$

El dual será:

$Z_{Max} = 130Y_1 + 190Y_2 + 200Y_3$

Restricciones:

$Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \leq 2$

$Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \leq 3$

$Y_j \geq 0$

3) **Problema primal:**

$Z_{Max} = 8x_1 + 5x_2$

Restricciones:

$4x_1 + 3x_2 \geq 120$

$2x_1 + 8x_2 \leq 160$

$x_1 + 2x_2 = 60$

$x_j \geq 0$

Siendo el primal un problema de maximización, todas las restricciones deben ser puestas en la forma $\leq$.

La primera se multiplica por (−1) para que cambie de sentido.

$-4x_1 - 3x_2 \leq -120$

La tercera restricción por ser igualdad se reemplazará por dos, una con signo ≥ y la otra con signo ≤.

$x_1 + 2x_2 \leq 60$

$x_1 + 2x_2 \geq 60$

De las dos últimas la segunda cambiamos de signo para igualar al resto.

$-x_1 - 2x_2 \leq -60$

Por lo tanto, el primal transformado a su forma canónica de maximización es:

$Z_{Max} = 8x_1 + 5x_2$

Restricciones:

$-4x_1 - 3x_2 \leq -120$

$2x_1 + 8x_2 \leq 160$

$x_1 + 2x_3 = 60$

$-x_1 - 2x_2 = -60$

$x_j \geq 0$

El problema dual será

$Z_{Min} = 120Y_1 + 160Y_2 + 60Y_3 - 60Y_4$

Restricciones:

$-4Y_1 + 2Y_2 + Y_3 - Y_4 \geq 8$

$-3Y_1 + 8Y_2 + 2Y_3 - 2Y_4 \geq 6$

$Y_j \geq 0$

Solución del dual a través del primal

Una de las aplicaciones de la dualidad existente en programación lineal es la posibilidad de obtener la solución de un modelo lineal a partir o por inspección de la solución de su dual o de su primal.

Esto significa que, habiendo resuelto un problema, implícitamente está resuelto el otro.

Entonces, esto da la posibilidad de trabajar con aquel modelo que tenga menor número de restricciones, disminuyendo por tanto el tiempo de solución.

Con un análisis sencillo estableceremos las relaciones entre la solución óptima del primal y la solución óptima de su dual.

Relación entre las funciones objetivas óptimas

Utilizando la notación matricial podremos expresar un modelo de maximización, como:

$$\text{PRIMAL} \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_{Max} = C_i X_i \text{ (fórmula 2.7)} \\ \text{Restricciones:} \\ AX \leq \text{b} \text{ (fórmula 2.8)} \end{array} \right.$$

En donde:

C_i = matriz de una sola fila.

A_i = matriz de una sola columna (variables primales).

A = matriz de los coeficientes tecnológicos.

b = matriz de una sola columna que representa a los términos independientes.

A este corresponde un dual:

$$\left\{ \begin{array}{ll} Z_{Min} = b^t y & (2.14) \\ A^T Y \geq C^T & (2.15) \end{array} \right.$$

Donde:

b^T = traspuesta de b.

Y = matriz de una sola columna (variables duales).

A^T = Es la traspuesta de A.

C^T = traspuesta de C.

Supongamos que X sea una solución factible cualquiera, reemplazando en el primal tenemos.

$CX = X^T C^T \leq X^T (A^T Y)$, porque $C^T \leq A^T Y$

Pero, $X^T (A^T Y) = (AX)^T Y$

Luego: $CX \leq (AX)^T Y$

A su vez: $AX \leq b \Rightarrow (AX)^T \leq b^t$

O Lo que es lo mismo: $Z_{Max} \leq Z_{Min}$

Lo que significa que Z_{Max} no puede sobrepasar el valor de Z_{Min}, y esta a su vez no puede ser menor que Z_{Max}.

Una vez desarrollado el problema primal podemos obtener los valores de las variables principales y de holgura del dual de la siguiente manera:

Las variables óptimas principales del dual son numéricamente iguales al valor absoluto de los correspondientes elementos de las variables de holgura que se encuentran en la fila del criterio simplex en la tabla óptima del primal.

Las variables óptimas de holgura del dual son numéricamente iguales al valor absoluto de los correspondientes valores de las variables principales del primal que se encuentran en la columna de *bn* en la tabla óptima del primal.

Interpretación económica del dual

Ya se analizó como un problema de maximización está asociado matemáticamente a otros de minimización, y como matemáticamente el problema dual puede extraerse del primal.

Los dos problemas: Primal y Dual; son en realidad modelos de alguna situación física de uso óptimo de recursos. Por tanto, es natural que estos problemas deban también estar asociados en su interpretación económica.

La interpretación económica:

- Explica por qué las desigualdades de las restricciones se invierten.
- Da una interpretación del papel de los Cj y bi en uno y otro problema.

Ejercicio

Vital Cia. Ltda. transporta sus productos en un camión que tiene una capacidad de 800 cajas de frutas. Él debe transportar al menos 200 cajas de tomate de árbol que le dejará de utilidad $ 20 por caja, al menos 100 de babaco con los cuales obtendrá una ganancia de $ 10 por caja y cuando mucho 200 cajas de guayaba con $ 30 de ganancia por caja. ¿Cómo debe distribuirse el cargamento del camión para obtener la máxima ganancia?

Función Objetivo:

$Z_{Max} = 20x_1 + 10x_2 + 30x_3$

X1 = Cajas de tomate

X2 = Cajas de babaco

X3 = Cajas de guayaba

Restricciones o limitaciones

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 800$	Capacidad
$x_1 \geq 200$	Cajas de tomate
$x_2 \geq 200$	Cajas de babaco
$x_3 \leq 200$	Cajas de guayaba
$x_j \geq 0$	No negatividad

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 800$ Capacidad

$-x_1 \leq -200$ Cajas de tomate

$-x_2 \leq -100$ Cajas de babaco

$x_3 \leq 200$ Cajas de guayaba

$x_j \geq 0$ No negatividad

Variable de Holgura y Artificiales:

$x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = 800$

$-x_1 + S_2 = -200$

$-x_2 + S_3 = -100$

$x_3 + S_4 = 200$

Cj			20	10	30	0	0	0	0
	X_j	Bn	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4
0	S_1	800	1	1	1°	1	0	0	0
0	S_2	–200	–1	0	0°	0	1	0	0
0	S_3	–100	0	–1	0°	0	0	1	0
0	S_4	200	0	0	1*	0	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - C_j$	-	–20	–10	–30	0	0	0	0
0	S_1	600	1*	1	0	1	0	0	–1
0	S_2	–200	–1°	0	0	0	1	0	0
0	S_3	–100	0°	–1	0	0	0	1	0
30	X_3	200	0°	0	1	0	0	0	1
	Z_j	6 000	0	0	30	0	0	0	30
	$Z_j - C_j$	-	–20	–10	0	0	0	0	30
20	X_1	600	1	1	0	1	0	0	–1
0	S_2	400	0	1	0	1	1	0	–1
0	S_3	–100	0	–1	0	0	0	1	0
30	X_3	200	0	0	1	0	0	0	1
	Z_j	18 000	20	20	30	20	0	0	10
	$Z_j - C_j$	-	0	10	0	20	0	0	10

Tabla 2.25. Variable de Holgura y Artificiales.

Solución del problema primal

$Z_{Max} = 18\ 000$

$x_1 = 600$

$S_1 = 0$

$S_3 = -100$

$x_2 = 0$

$S_2 = 400$

$S_4 = 0$

$X_3 = 200$

Vital Cia. Ltda. deberá transportar 600 cajas de tomate y 200 cajas de guayaba para lograr una utilidad máxima de 18 000 dólares.

Solución del problema dual

Función objetivo

$Z_{Min} = 800Y_1 - 200Y_2 - 100Y_3 + 200Y_4$

Restricciones:

$Y_1 - Y_1 \geq 20$

$Y_1 - Y_3 \geq 10$

$Y_1 + Y_4 \geq 30$

Solución óptima:

$Y_1 = S_1 = 20$

$Y_2 = S_2 = 0$

$Y_3 = S_3 = 0$

$Y_4 = S_4 = 10$

$Z_{Min} = 800(20) - 200(0) - 100(0) + 200(10)$

$Z_{Min} = 18\ 000$

CAPÍTULO III
3. PRONÓSTICOS

3.1 PRONÓSTICOS

En este capítulo veremos que el futuro será diferente dentro de las organizaciones de carácter privado y las instituciones del sector público, es así que las oportunidades y fortalezas que actualmente sirven a las empresas, mañana no serán iguales, ni tendrán la misma importancia para la organización sea cual fuese su naturaleza.

Se lo define como la estimación anticipada del valor de una variable en el tiempo.

Ejemplo:

El pronóstico de ventas de pan en el mercado local, será igual a la cantidad de pan que demanda el mercado local.

3.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS PRONÓSTICOS

Existen tres características principales en todo pronóstico:

- **El tiempo**, ya que todas las situaciones en las que se requiere un pronóstico, están relacionadas con el futuro.
- **La incertidumbre**, debido al riesgo o desconocimiento de lo que puede pasar en el futuro.
- **La contabilidad**, es decir, la confianza que tiene la persona que hace el pronóstico sobre la información contenida en los datos históricos.

Estas características están presentes en cualquier pronóstico que se haga, sea éste formal o informal.

El pronóstico más efectivo es aquel que resulta de una combinación de un buen juicio con una buena técnica cuantitativa.

3.3 PROCESOS PARA PRONOSTICAR

El proceso de hacer pronósticos implica seguir una serie de pasos sistemáticos para predecir eventos futuros o estimar valores futuros de variables. La figura 3.1. muestra los pasos a seguir en el proceso de hacer pronósticos.

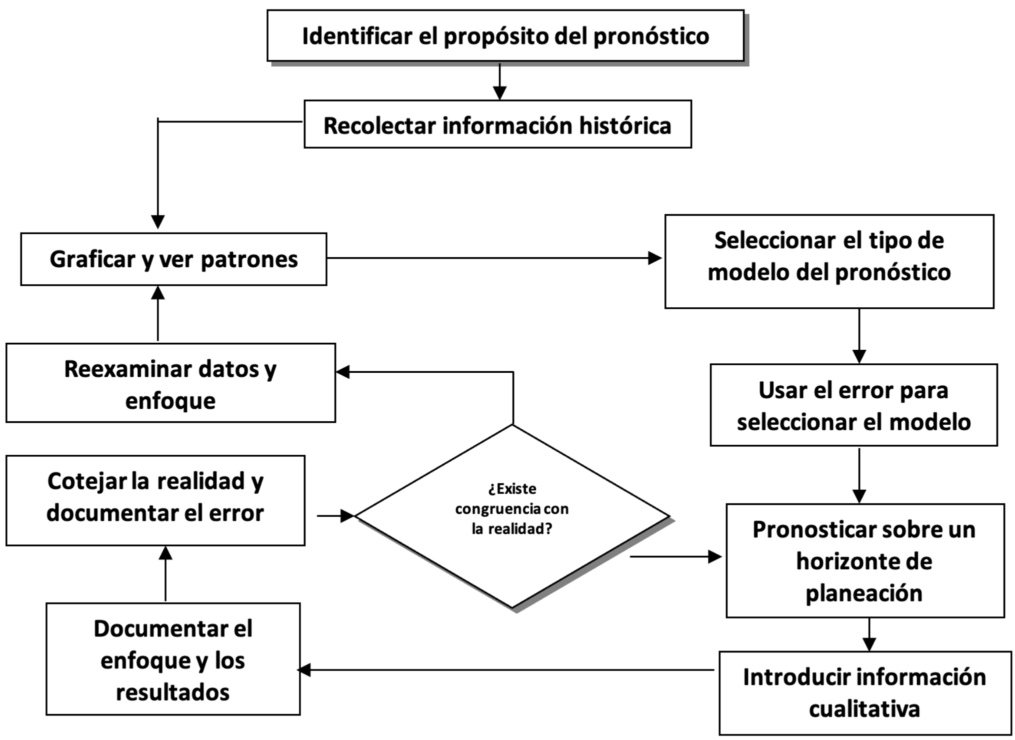


Figura 3.1. Procesos para pronosticar.

3.4 Métodos de cálculo de un pronóstico

Existen varios métodos de cálculo para hacer un pronóstico, y la elección del método dependerá de la naturaleza de los datos, la disponibilidad de información histórica y el propósito del pronóstico. A continuación, se presentan algunos métodos comunes para calcular pronósticos:

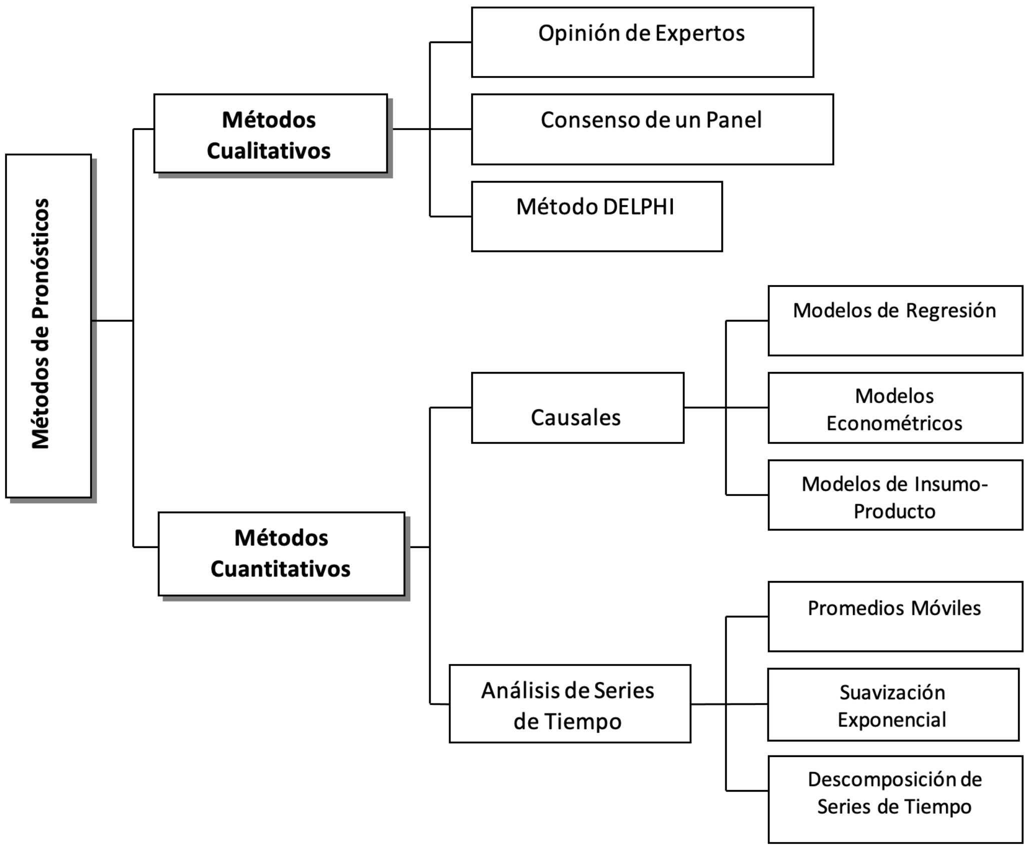


Figura 3.2. Métodos de cálculo de un pronóstico.

3.4.1 Métodos cualitativos

3.4.1.1 Opinión de expertos

En este método, se solicita la opinión a un experto sobre la variable a manejar para tres escenarios: un pesimista (a), probable (b) y optimista (c). A continuación, se estima la probabilidad de ocurrencia de cada ambiente y se encuentra el Valor Esperado (VE) o pronóstico con la participación de la siguiente fórmula:

$$VE = (a)(Pa) + (b)(Pb) + (c)(Pc) \tag{3.1}$$

Donde:

a representa el escenario pesimista

$P(a)$ es la probabilidad de ocurrencia de a

b representa el escenario probable

$P(b)$ es la probabilidad de ocurrencia de a

c representa el escenario optimista

$P(c)$ es la probabilidad de ocurrencia de a

Ejemplo:

El gerente de una compañía exterioriza su opinión respecto a las ventas que espera para el próximo año, de acuerdo con lo siguiente:

Escenario	Opinión	Probabilidad (%)	Valor Esperado (u)
A. Probable	100	5	5
B. Optimista	55	45	24,5
C. Pesimista	140	80	112
		Valor Esperado = 142	

Tabla 3.1. Pronóstico cualitativo de ventas.

3.4.1.2 Consenso de un panel

Esta técnica consiste en tomar la opinión de un grupo de personas y obtener el pronóstico en base a la suma de opiniones ponderada.

Ejemplo:

La fuerza de ventas de "SERACOMP", CIA. LTDA., se reúne con objeto de expresar sus opiniones respecto al volumen esperado de ventas para 20XX. Las opiniones y el peso específicos de cada de ellas se muestran en la siguiente tabla:

Panelista	Pronóstico	Peso	Promedio ponderado
Dirección de Dpto.	5 000	25	1 250
Subdirector	16 500	25	4 125
Vendedor 1	5 500	45	2 475
Vendedor 2	5 000	35	1 750
Vendedor 3	4 600	15	690
		Valor Esperado = 10 290	

Tabla 3.2. Pronóstico departamento de ventas SERACOMP.

3.4.1.3 Método DELPHI

A través de esta técnica de grupo, el investigador consulta por separado a cada experto sobre el tema propuesto, con objeto de evitar llegar a consensos en base a factores predominantes de personalidad, y jerarquía; los resultados obtenidos se agrupan en una tabla y a partir de ella llegar al pronóstico requerido.

Ejemplo:

A un grupo de expertos se le solicita su pronóstico respecto a la población estimada de la provincia en el año 20XX, los resultados obtenidos se muestran a continuación.

Población (miles)	Mediana	Núm. de opiniones	Probabilidad	Promedio ponderado
40 o más	0,0	0,0	0,0	0,0
30-39	49,5	1,0	0,1	4,1
20-29	34,5	2,0	0,2	5,8
10-19	19,5	2,0	0,2	3,3
1 – 9	5,5	7,0	0,6	3,2
Menos de 1	0,0	0,0	0,0	0,0
Totales		12	100 %	16,3
			Valor Esperado = 16,3	

Tabla 3.3. Pronóstico población.

Analíticamente será una población entre diez mil y diecinueve mil habitantes en la provincia para el año 20XX.

3.4.2 Métodos cuantitativos

3.4.2.1 Modelos Causales

Asumen que el factor que se va a pronosticar presenta una relación causa-efecto con una o más variables independientes. Por ejemplo, se puede tener un modelo donde las ventas se ubican en función del precio, de la competencia y del crecimiento del producto interno bruto, entre otras variables.

El principal objetivo de los modelos causales es cuantificar la relación entre las variables para predecir valores futuros de la variable dependiente.

Para mayor entendimiento de la mecánica resolutiva de un pronóstico abordaremos temas fundamentales entorno a la terma:

a. El análisis de correlación lineal simple

Su objetivo:

Estudiar el comportamiento recíproco o asociación de dos variables.

Generalidades

En ciertas situaciones empresariales se encuentra a menudo variaciones que están aparentemente asociadas o que son interdependientes, así puede existir situaciones en la cual el aumento de la variable “X” está acompañado de un aumento correspondiente de la variable “Y” o en sentido inverso.

Cuando se puede demostrar que la variación de una variable está de algún modo asociada con la variación de otra, se puede decir que las dos variables están asociadas o correlacionadas.

La correlación puede ser positiva cuando ambas variables, "X" y "Y", aumentan juntas; negativa cuando el aumento en una variable provoca una disminución en la otra; y cuando las dos variables no tienen una relación discernible, se observa en el diagrama disperso que no siguen ninguna tendencia, lo que indica que no hay asociación y, por lo tanto, ninguna correlación entre las dos variables.

El objetivo del estudio de la correlación es determinar si al variar los valores de “X” en determinado sentido en las unidades de observación, “Y” en estas unidades aumenta, disminuye o se mantienen igual.

El coeficiente de correlación

La correlación se expresa mediante el coeficiente “r”, que puede tomar los valores de −1 hasta +1. Un coeficiente de 1 sea positivo o negativo indica una correlación perfecta entre dos variables, en cambio un coeficiente de cero, sugiere una falta completa de correlación.

Si correlacionamos las ventas y el ingreso de una empresa, obtendremos un disperso grama que muestra una asociación directa entre ambas variables, indicando una relación positiva entre las ventas y el ingreso de la empresa.

Un modelo similar en forma inversa se puede obtener al correlacionar la incidencia de caries dentales y el nivel de fluorización (figura 3.3).

Al correlacionar la incidencia de caries dentales y el nivel de fluorización, se puede obtener un modelo similar en forma inversa, lo que sugiere una relación negativa entre la incidencia de caries dentales y el nivel de fluorización. Es decir, a medida que aumenta el nivel de fluorización, se observa una disminución en la incidencia de caries dentales.

La figura 3.3. muestra una dispersión aleatoria de puntos, cuando dos variables no están asociadas en absoluto, presentándose el dispersograma en forma circular, horizontal o vertical.

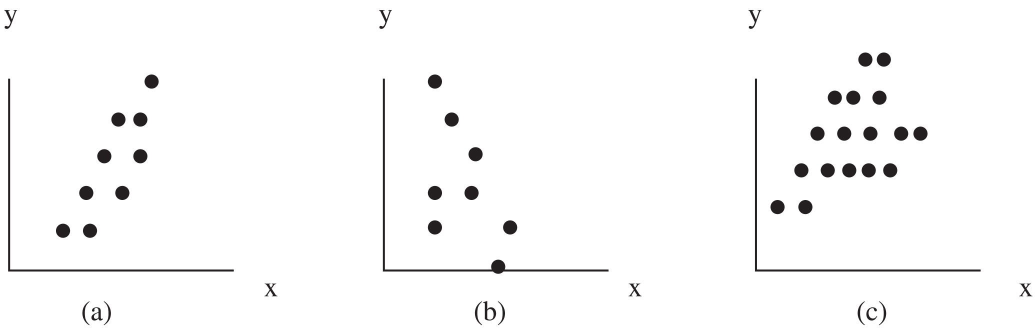


Figura 3.3. Dispersión aleatoria.
(a) Forma circular.
(b) Forma horizontal.
(c) Forma vertical. En una sola línea

Al elevar al cuadrado el coeficiente de correlación se obtiene el coeficiente de determinación (r^2), que establece la estimación de la intensidad de la asociación entre dos variables y al multiplicar por 100, determina la frecuencia de asociación de las dos variables en estudio, sin determinar cuál de las dos explica mejor la variación porque ambas son consideradas como variables independientes.

Requisitos para el cálculo de "r"

Para que el coeficiente de correlación sea una buena medida es necesario que:

- La correlación teórica se aproxime a una línea recta.
- Que sea una distribución bi variable.

Si estos requisitos no se cumplen, se utilizará otros métodos llamados "No Paramétricos".

Cálculo del coeficiente de correlación

1. Planteamiento del problema

Determinar si hay o no asociación entre las ventas de la empresa (miles USD) y los inventarios (unidades), para lo cual se seleccionan aleatoriamente a 15 días de ventas e inventario de la empresa, obteniendo los datos que se muestran.

La tabla 3.4. muestra las ventas de la empresa (miles USD) y los inventarios (unidades) en un grupo de días.

n	Ventas x	Inventarios y
1	146	181
2	205	228
3	157	182
4	165	249
5	184	259
6	153	201
7	220	339
8	181	224
9	151	112
10	188	241
11	181	225
12	163	223
13	198	257
14	193	337
15	157	197

Tabla 3.4. Cálculo del coeficiente de correlación.

Dados los valores que se presentan en la tabla 3.4, se ofrecen a continuación las operaciones correspondientes al cálculo del coeficiente de correlación.

$n = 15$

$\sum x = 2\ 642$

$\sum x^2 = 472\ 218$

$\sum y = 3\ 455$

$\sum y^2 = 841\ 855$

$\sum xy = 622\ 508$

2. Formulación de hipótesis

Ho: No existe asociación estadísticamente significativa entre las ventas de la empresa (Pc) y el inventario de productos terminados (C/c) en los quince días analizados.

$$H_0: Pc = Cc; p = 0$$

H1: Las ventas en los 15 días se relacionan significativamente con el inventario de productos terminados.

$$H_1: Pc \neq Cc; p \neq 0$$

Nivel de significación: $P \leq 0{,}05$

3. Verificación de hipótesis

La manera más sencilla de presentar y observar la relación entre dos variables es estructurar la figura de correlación.

La técnica para construir esta figura es la siguiente:

a. En cada uno de los ejes se coloca cada una de las variables estudiadas, la variable "x" se registra en el eje horizontal y en el eje vertical se anota la variable "y".

b. Para la definición de la escala de cada variable, se asigna los valores mínimo y máximo de la serie, sin necesidad de comenzar de cero y se define las escalas de manera que ambos ejes tengan igual longitud.

c. Inscribir cada una de las unidades observadas, representando con un punto a la intersección de perpendiculares imaginarias.

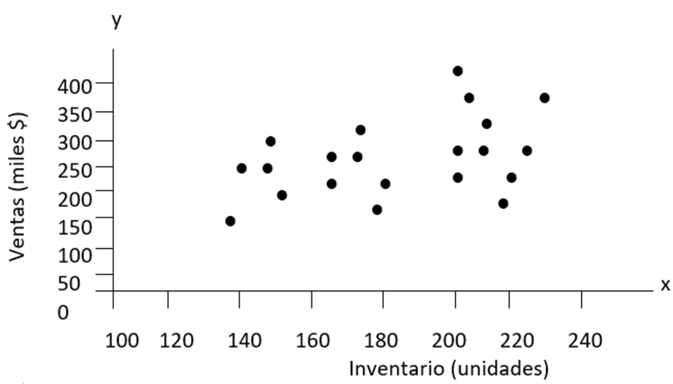


Figura 3.4. Correlación variables.

La fórmula para el cálculo de "r" es:

$$r = \frac{\sum xy - (\sum x)(\sum y)/n}{\sqrt{\left[\sum x^2 - (\sum x)^2/n\right]\left[\sum y^2 - (\sum y)^2/n\right]}} \tag{3.2}$$

Reemplazando los datos en la fórmula tenemos:

$$r = \frac{622\,508 - (2\,642)(3\,455)/15}{\sqrt{[472\,218 - \frac{(2\,642)^2}{15}][841\,855 - \frac{(3\,455)^2}{15}]}}$$

$$r = 0{,}78$$

Significación de "r"

La significación de "r" se realiza para determinar si el coeficiente muestral refleja o no una correlación real en la población, en otras palabras, el coeficiente de 0.78 obtenido en el ejemplo, es solo una desviación aleatoria de un valor poblacional de "Δ", que es cero. Por tanto, probamos la hipótesis nula empleando la estadística "t" con la fórmula siguiente:

$$t = \frac{r-0}{\frac{\sqrt{(1-r)^2}}{n-2}} \tag{3.3}$$

$$t = \frac{0{,}78}{\frac{\sqrt{(1-0{,}78)^2}}{13}}$$

$$t = 4{,}51$$

Buscando en la tabla de Valores Críticos de "t" (Anexo) con 13 gl (n-2) encontramos que "r" es estadísticamente significativo más allá del nivel 0,05. Al emplear el contraste bilateral, lo que establece que existe correlación estadísticamente significativa entre las ventas y el inventario de productos disponibles para la venta de la empresa.

Teóricamente se ha definido el grado de asociación mediante las siguientes categorías:

Correlación alta:	0,80 – 1,00
Correlación media:	0,40 – 0,79
Correlación baja:	0,00 – 0,39

En el ejemplo existe una correlación media ente las ventas y el inventario de productos disponibles para la venta en 15 días de gestión de la empresa.

Categorización del coeficiente de correlación

Los coeficientes de correlación, también se categorizar de la siguiente manera:

– 1,00	→	Correlación negativa perfecta
−0,95	→	Correlación negativa fuerte
−0,50	→	Correlación negativa moderada
−0,10	→	Correlación negativa débil
0,00	→	Ninguna correlación
+0,10	→	Correlación positiva débil
+0,50	→	Correlación positiva moderada
+0,95	→	Correlación positiva fuerte
+1,00	→	Correlación positiva perfecta

Esto indica que mientras más cerca esta del 1,00 en una u otra dirección, mayor es la fuerza de la correlación.

Al elevar al cuadrado el coeficiente de correlación, en el ejemplo se obtiene un r2 (Coeficiente de Determinación) de 0,61; por lo que se deduce que el 61 % de la variación del inventario de productos disponibles para la venta "responde" o se "explica" a la variación de las ventas.

Análisis de regresión lineal simple

Objetivo

Analizar el grado de influencia o dependencia de una variable biológica.

Generalidades

El análisis de regresión permite al investigador saber cuánto cambio puede esperar en "Y" como resultado de una unidad de cambio en "X", por tanto, permite "predecir" el valor de la variable dependiente que está influida por una variable independiente.

Para la validez estadística del análisis de regresión es necesario que la variable "X" llamada variable independiente, de cuyos valores se harán las predicciones-tienen valores fijos y conocidos, en cambio "y" llamada variable dependiente, sea una variable aleatoria.

La identificación de la variable independiente y dependiente es requisito indispensable para realizar este análisis.

La figura y su descripción

El paso inicial para el desarrollo del análisis de regresión es realizar una figura de dispersión, que permitirá dimensionar la tendencia de los pares de datos registrados y visualizar como cambia la variable dependiente al modificarse la variable independiente.

La figura se estructura con la variable independiente en el eje horizontal o eje de las abscisas y la variable dependiente en el eje vertical o eje de las ordenadas.

a.) El modelo de regresión lineal

La ecuación general de una línea recta es:

$$y = a + bx \tag{3.4}$$

Donde:

a: Es el intercepto, es decir el valor de "y" cuando "x" equivale a cero.

b: Es la dependiente, es decir el cambio de "y" por unidad de cambio de "x" o el coeficiente de regresión.

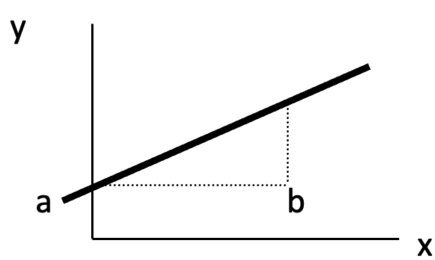


Figura 3.5. Modelo de Regresión Lineal.

De acuerdo a este modelo, los promedios de las variables se disponen en una línea recta, cuya fórmula es:

$$uy/x = \alpha + \beta x \tag{3.5}$$

Donde:

α: Promedio poblacional de y para x=0

β: Cambio en el promedio de "y" cuando "x" aumenta una unidad

Ajuste de la línea recta

Ejemplo:

1. Planteamiento del problema

Se investiga si la capacidad vital de 8 niños depende de su edad (años), los datos son los siguientes:

N	Edad x	Capacidad Vital y	Desviación cuadrática en la variable x $(x-\bar{x})^2$	Desviación cuadrática en la variable x $(y-\bar{y})^2$
1	4	0,79	12,25	0,372
2	5	0,93	6,25	0,221
3	6	1,15	2,25	0,063
4	7	1,29	0,25	0,012
5	8	1,47	0,25	0,005
6	9	1,71	2,25	0,096
7	10	1,87	6,25	0,221
8	11	1,99	12,25	0,348

Tabla 3.5. Problema Modelo de Regresión Lineal.

A partir de la tabla 3.5 se lleva a cabo el cálculo del modelo de regresión lineal.

$n = 8$

$\sum x = 60$

$\sum x^2 = 492$

$\sum y = 112$

$\sum xy = 91{,}48$

$\bar{x} = 7{,}5$

$\bar{y} = 1{,}4$

2. Formulación de hipótesis

Ho: La capacidad vital de los niños es igual en las distintas edades cronológicas o la dispersión observada es aleatoria en relación de su parámetro poblacional.

$$H_0: \beta = 0$$

H1: La capacidad vital de los niños aumenta a medida que aumenta su edad.

$$H_1: \beta > 0$$

Nivel de significación:

$$P \leq 0{,}05$$

3. Verificación de hipótesis

Las ecuaciones a utilizarse son:

$y = a + bx$ (fórmula 3.4)a	Valor de la ordenada al origen a $a = \bar{y} - b\bar{x}$	Tasa variable de y $b = \dfrac{\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)/n}{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n}$
$\bar{y}\ x\ min = 0{,}05 + 0{,}18(4) = 0{,}77$ $\bar{y}\ x\ max = 0{,}05 + 0{,}18(11) = 2{,}03$	$= 1{,}4\text{-}(0{,}18)(7{,}5)$ $= 0{,}05$	$= \dfrac{91{,}48 - (60)(11{,}2)/8}{492 - (60)^2/8}$ $=0{,}18$
$\bar{y}\ x\ min$: “y” estimada en función de “x” mínima $\bar{y}\ x\ man$: “y” estimada en función de “x” máxima $\bar{y}$: promedio de los valores de “y”		

De acuerdo a estos resultados, por cada año de edad se incrementa en 0,18 unidades la capacidad vital.

Al realizar la gráfica de dispersión y ubicando la "Línea de mejor ajuste a los datos" con la ecuación y = 0,05+0,18(x) se obtiene la representación gráfica que a continuación se reporta.

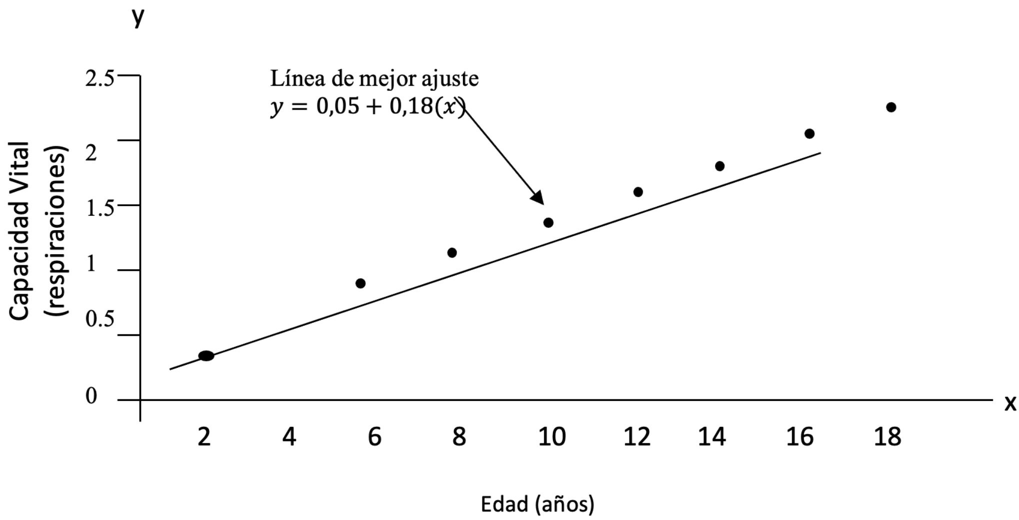


Figura 3.6. Línea de mejor ajuste a los datos.

De este modo puede observarse que, utilizando la ecuación de regresión, se ha establecido la naturaleza de dependencia de la capacidad vital en función de la edad. Con la ecuación obtenida con la fórmula 3.4 (y=0,05+0,18x) se puede extrapolar e interpolar el valor de la capacidad vital a cualquier edad, reemplazando "x" por cualquier edad, así para 15 años la capacidad vital será de 2,75, así:

$$y(15) = 0,05 + 0,18(15) = 2,75$$

Significación de "b"

Para determinar si la capacidad vital depende de forma estadísticamente significativa de su edad, se puede utilizar la estadística "t", fórmulas 3.6, 3.7 y 3.8, así:

Estadístico t de Student	Desviación de la regresión	Desviación de la correlación
$t = \dfrac{b-0}{\sqrt{S^2yx/\Sigma(x-\bar{x})^2}}$	$Syx = Sr\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}$	$Sr = \sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}$
$= \dfrac{0{,}18}{\sqrt{0{,}067^2/42}}$ $= 17{,}48$	$= 0{,}058\sqrt{1{,}338}$ $= 0{,}067$	$= \sqrt{\dfrac{1-0{,}99^2}{8-2}}$ $= 0{,}058$

Tabla 3.7. Significación de "b".

Al igual que el análisis de correlación, el análisis de regresión se deriva a partir de una muestra, de modo que el coeficiente de regresión muestral considera que los valores observados sea una desviación aleatoria de su verdadero coeficiente de regresión poblacional que es igual a cero.

Al comparar el valor "*t*" calculado de 17,48 con el "*t*" crítico con 6 gl (n-2) (Anexo) se encuentra un valor de 2,447, por lo que se rechaza el Ho al nivel 0,05, por tanto, se concluye que la capacidad vital es mayor a medida que se incrementa su edad cronológica.

Otra forma de expresión de la ecuación de la recta es la descomposición de sus elementos constitutivos:

Ecuación de la recta o pronóstico en base a la fórmula 3.4: $y = a + bx$

Donde, *y*: valor esperado de la variable dependiente.

x: valor dado de la variable independiente.

a: tasa fija o monto de Y, que no depende de X.

b: tasa variable o grado de dependencia de Y con respecto a X.

n: Número de valores históricos.

$$a = \frac{[(\Sigma y)(\Sigma y^2)]-[(\Sigma x)(\Sigma xy)]}{n(\Sigma x^2)-(\Sigma x)^2} \tag{3.9}$$

$$b = \frac{n(\Sigma xy)-[(\Sigma x)(\Sigma y)]}{n(\Sigma x^2)-(\Sigma x)^2} \tag{3.10}$$

Ejercicio de Regresión Lineal Simple.

La empresa "X" desea pronosticar su nivel de inventarios con base a ventas para 2006 de acuerdo con la siguiente información:

Año	Ventas (unidades)	Inventarios (unidades)	X^2	XY
2002	120	12		
2003	130	13		
2004	140	14		
2005	150	15		
2006	160	?		

Tabla 3.8. Ejercicio de Regresión Lineal Simple.

$y = a + bx$ $a =$ ________ $b =$ ________

Inventario 2 006 = ____________ + (___________ x __________)

Inventario 2 006 = ____________

b.) Análisis de series de tiempo

Una serie de tiempo es un conjunto ordenado de observaciones cuantitativas tomadas en puntos sucesivos en el tiempo. El principal objetivo de estos métodos es descubrir el patrón o tendencia que tiene la serie de datos históricos y extrapolar ese patrón al futuro.

Promedio móvil simple

Consiste en calcular la media o promedio de un conjunto de datos agrupados por períodos y usar este promedio como pronóstico del siguiente período. Se habla de promedio móvil porque cada observación nueva elimina la observación más antigua para calcular un nuevo promedio.

Ejemplo:

Obtener pronóstico en base a 3 y 5 observaciones, en la siguiente tabla de ventas durante los últimos once meses en SERACOMP.

Período	Embarques	Pronóstico 3 Observaciones	Error Absoluto	Pronóstico 5 Observaciones	Error Absoluto
1	200,0				
2	135,0				
3	195,0				
4	197,5	176,7	20,8		
5	310,0	175,8	134,2		
6	175,0	234,2	59,2	207,5	32,5
7	155,0	227,5	72,5	202,5	47,5
8	130,0	213,3	83,3	206,5	76,5
9	220,0	153,3	66,7	193,5	26,5
10	277,0	168,3	108,7	198	79
11	275,0	209,0	66,0	191,4	83,6
12	?	257,3		211,4	

Tabla 3.9. Tabla de Ventas SERACOMP.

Error Absoluto Medio = __76,42____ __57,60________

EAM = Sumatoria de errores absolutos / Núm. de errores

De este modo elegimos el valor esperado para el periodo 12 en función al menor error absoluto medio; es decir las ventas que se pretenden tener para el periodo de análisis en SERACOMP es de 211 unidades.

Promedio móvil doble

Constituye una modificación al método anterior, ha sido desarrollado para utilizarlo en situaciones donde tenemos patrones con tendencia.

La base en este método consiste en calcular un segundo promedio móvil, es decir sobre el primer promedio móvil sacar uno nuevo, sin que ninguno de los dos constituya el valor esperado, únicamente se lo hace para encontrar las variables que permitan encontrar el valor futuro, de este modo las fórmulas a aplicar son las siguientes:

$$PPM = (X1 + X2 + X3 + \cdots + Xn)/n \tag{3.11}$$

Donde:

PPM es el primer promedio móvil utilizando *n* datos.

$$SPM = (PPM1 + PPM2 + PPM3 + \cdots + PPMn)/n \tag{3.12}$$

Donde el segundo promedio móvil:

SPM constituye el segundo promedio móvil utilizando n datos.

$$a_t = PPM + (PPM - SPM) = 2 * PPM - SPM \tag{3.13}$$

Donde:

a_t representa la tasa fija que se considera en el pronóstico

$$\boldsymbol{b_t} = \left(\frac{2}{N-1}\right) * (PPM - SPM) \tag{3.14}$$

Donde:

b_t representa la tasa variable que se considera en el pronóstico

$$F_{t+m} = a_t + b_t \tag{3.15}$$

Donde:

F_{t+m} es el pronóstico para el periodo $t+m$, donde m es el número de periodos a calcular.

a_t+b_t constituyen factores para construir el patrón de tendencia al pronóstico para el siguiente período, de modo que se tenga un pronóstico con un Error Absoluto medio más pequeño.

Ejemplo:

SERACOMP ha detectado que la venta de su empresa presenta un patrón de crecimiento ligero a través del tiempo, por lo que ha decidido pronosticar las ventas que se tendrán en el mes de diciembre del presente año, para lo cual se utilizan los datos de los últimos 11 meses, además, se ha decidido utilizar un promedio móvil de 4 datos.

Período	Ventas (en miles)	PPM	SPM	At	bt	Ft+m	Error Absoluto
1	200,0						
2	135,0						
3	195,0						
4	197,5	181,9					
5	310,0	209,4					
6	175,0	219,4					
7	155,0	209,4	205,0	213,8	2,9		
8	130,0	192,5	207,7	177,3	−10,1	216,7	86,7
9	220,0	170,0	197,8	142,2	−18,5	167,2	52,8
10	277,0	195,5	191,8	199,2	2,4	123,6	153,4
11	275,0	225,5	195,9	255,1	19,8	201,6	73,4
12	?					274,9	

Tabla 3.10. Ejercicio Promedio Móvil Doble SERACOMP.

El nivel de ventas que SERACOMP espera para el mes de diciembre es de 274,90 dólares. La figura 3.7. ilustra los resultados del método para el ejemplo discutido:

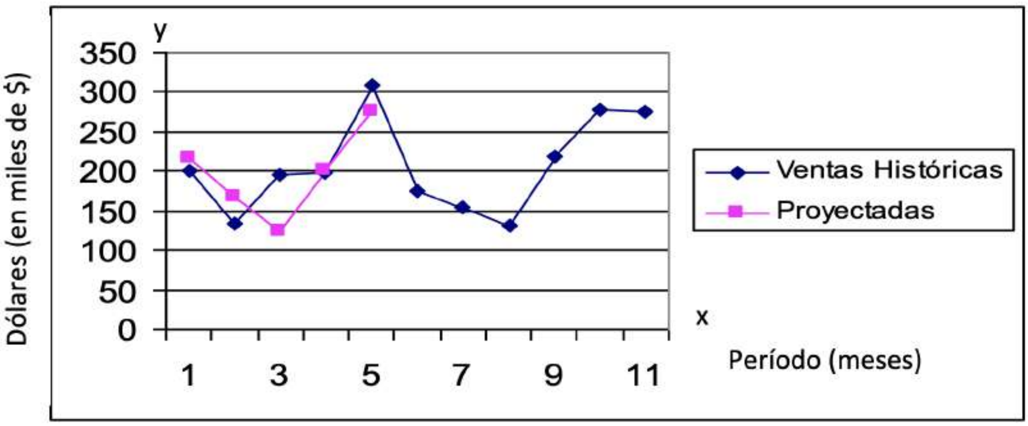


Figura 3.7. Ventas históricas y proyectadas SERACOMP.

b. Métodos de suavización exponencial

Como se indicó anteriormente, estos métodos son recomendables en aquellos casos en los que se considera pertinente atribuir más importancia a las observaciones más recientes para la realización de los pronósticos.

Método de suavización exponencial simple

Este método en lo que se basa es en establecer un factor o peso relativo de la importancia de la observación más reciente, este factor debe estar entre cero y uno (0−1). Algebraicamente el método de suavización exponencial simple puede representarse por la siguiente ecuación:

$$F_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha)\, F_t \qquad (3.16)$$

Donde:

F_{t+1} = Valor del pronóstico en el periodo $t + 1$

X_t = Valor de la observación o dato en el periodo t

F_t = Valor del pronóstico en el periodo t

α = Factor de ponderación entre cero y uno

Otra ecuación alterna de calcular el pronóstico para el periodo t + 1 por este método sería la siguiente:

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(X_t - F_t\,) \qquad (3.17)$$

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(e_t\,) \qquad (3.18)$$

De acuerdo a esta última ecuación se puede ver que el pronóstico proporcionado por el método de suavización exponencial simple es sencillamente el pronóstico anterior más un ajuste por el error cometido en el último pronóstico.

De manera general, se puede decir que cuando α tiene un valor cercano a 1, el nuevo pronóstico incluirá un ajuste sustancial por el error en el pronóstico anterior, en cambio cuando α tiene un valor cercano a 0, el nuevo pronóstico incluirá muy poco ajuste.

Para poder inicializar los cálculos con este método se toma como valor del pronóstico del primer periodo al valor del dato u observación del primer periodo (es decir $F_1 = X_1$) y de aquí en adelante se empiezan a calcular los valores de los pronósticos para los siguientes periodos.

Ejemplo

Cóndor se dedica a la venta de pinturas en cubetas, desea estimar la demanda de pintura para su nuevo producto, para dentro de un mes y tiene como datos las ventas de cubetas en los seis meses anteriores, para esto utilice el método de suavización exponencial simple, con un factor de 0,1 y con un factor de ajuste del 0,9 y determine cuál de los dos factores sería el más apropiado para este caso:

Mes	Cubetas	Pronóstico con $\alpha = 0{,}1$	Pronóstico con $\alpha = 0{,}9$
1	50		
2	45	50	50
3	60	49,5	45,5
4	52	50,6	58,6
5	45	50,7	52,7
6	51	50,1	45,8
7		50,2	50,5

Tabla 3.11. Ejercicio método de suavización exponencial doble.

La siguiente es una figura comparativa correspondiente al ejemplo anterior:

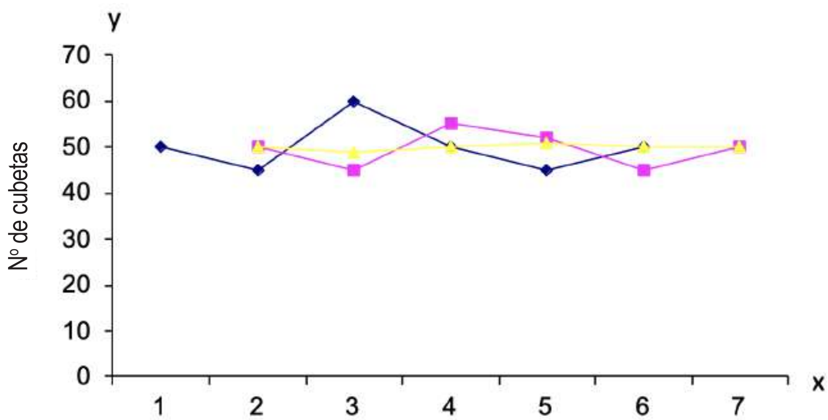


Figura 3.8. Gráfico comparativo ejemplo venta de pinturas.

CAPÍTULO IV
4. TRANSPORTE

4.1 EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

El problema del transporte, elemento fundamental de la Programación Lineal dentro de la Matemática Aplicada que se fundamenta en el propósito de movilizar unidades de un punto de origen hacia un punto de destino, satisfaciendo los requerimientos específicos de los destinos a un costo mínimo con un plan de distribución óptimo Cepeda, P. (2022).

4.1.1 Definición del Modelo de Transporte

La distribución que se muestra en la figura 4.1., representa al problema de transporte, con *m* orígenes y *n* destinos, cada uno representado por un nodo. Las rectas constituyen los trayectos que unen los orígenes con los destinos. La recta (i, j) une el origen *i* con el destino *j*. La cantidad total de oferta en el origen es *ai* y la cantidad total de demanda en el destino es *bj*. El objetivo del modelo es minimizar el costo total de transporte, al tiempo que se satisfacen las restricciones de la oferta y la demanda Taha, H. (2017).

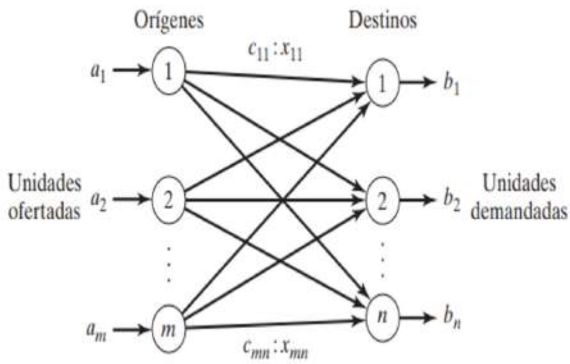


Figura 4.1. Representación del modelo de transporte con nodos y arcos.
Fuente: Taha, H. (2017).

4.1.2 Variaciones en el modelo de transporte

El modelo de transporte se refiere a un modelo de Programación Lineal (PL) que busca encontrar el menor costo posible en la satisfacción de las demandas en n destinos con las ofertas en m orígenes Acosta, A., Rivas, E. y Salcedo, O. (2019).

4.1.3 Métodos de transporte

De acuerdo a Valencia, E. (2018) los métodos de transporte tienen el propósito de minimizar los costos de transportación que se dan desde un origen o partida hasta el destino o llegada. Dicha acción se fundamenta en diversos supuestos:

a) Se parte de cantidades fijas de unidades que deben distribuirse a diferentes destinos.

b) El costo de transportación de la unidad del origen a los destinos es proporcional a la cantidad de unidades a distribuir.

c) La solución es factible cuando la suma de recursos en el origen es igual a las demandas en el destino.

Se reconocen en la literatura varios métodos de resolución de los problemas de transporte, entre los más utilizados el método Esquina Noreste, Costos Mínimos, Vogel y Russel, mismos que se detallan a continuación:

4.1.3.1 Método Esquina Noreste

Este método se emplea para la resolución de problemas de transporte y asignación a partir de una solución básica inicial que integra un conjunto de soluciones a través de aproximaciones sucesivas Salazar, B. (2019).

Iniciamos con el bosquejo del problema de manera matricial; es decir, definimos entre filas (que representan la oferta) y columnas (la demanda).

	Demanda			
Oferta	Esquina Noreste			

Tabla 4.1. Representación matricial del método esquina noreste.
Fuente: Salazar (2019).

Los pasos para solucionar un problema de programación lineal por este método son:

Paso 1.- Seleccionar la celda de la esquina noroeste (esquina superior izquierda) para un envío.

Paso 2.- Ubicar en esa celda la mayor cantidad permitida por la oferta y demanda correspondiente.

Paso 3.- Actualizar los valores de la oferta y de la demanda que fueron modificados por el paso. (2)

Paso 4.- Seguir para la celda de la derecha si existe alguna oferta restante y vuelva al paso (2). En caso contrario, siga para la celda inferior y vuelva al paso (2) hasta contemplar la distribución.

El resultado es producto de la distribución generada por el método esquina noreste multiplicado por los costos iniciales de distribución, esdecir la sumatoria del producto de (*xij*cij*).

4.1.3.2 Método de Costos Mínimos

Constituye un modelo de aproximaciones sucesivas que en principio ofrece una mejor solución a los problemas de transporte puesto que se centraliza en las rutas que generan menor costo. El proceso inicia con la asignación de todo lo viable a la celda con mínimo costo unitario. A continuación, la fila o columna satisfechos se anulan, y como consecuencia la oferta y demanda se ajustan. Si se satisfacen en forma simultánea oferta y demanda al mismo tiempo, se anulará una de los dos, igual que en el método esquina noreste. A continuación, se busca la celda que no ha sido anulada con el costo unitario mínimo y se repite el proceso hasta que queda sin anular puntualmente un reglón o una columna Taha, H. (2017).

Para la resolución de un problema por este método de programación lineal, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1. Seleccionamos de la matriz, el trayecto (celda) de menor costo (al darse un equilibrio, este se rompe arbitrariamente) y se le consigna una cantidad mayor de unidades posible en función a las restricciones de oferta o demanda. Seguidamente se procede a ajustar la oferta y demanda de la fila y/o columna satisfecha, restándole la cantidad asignada a esa posición.

Paso 2. En este punto, procedemos a eliminar la fila o destino cuya oferta o demanda sea 0, de darse el caso en el que ambas son cero, se elige de modo arbitrario cual eliminar, y la sobrante se deja con demanda u oferta cero (0).

Paso 3. Llegado a este paso existen dos alternativas, la primera hace referencia a un solo renglón o columna, de darse el caso, se ha llegado al final del método; por el contrario, si queda más de un renglón o columna, se debe iniciar nuevamente el paso 1 Salazar, B. (2019).

4.1.3.3 Método de Vogel

Considerado como el método de aproximación que brinda mayor certeza al momento de resolver problemas de bajo costo, capaz de alcanzar soluciones reales y más acertadas, en razón de tener una versión actualizada respecto al método de costos mínimos y esquina noreste.

El método se basa en el concepto de ganancia, la estrategia Vogel reside en ir asignando valores a las celdas con menor costo, de manera que las posibles filas o columnas que puedan saturarse sea la de mayor ganancia Sallán, J., Suñé, A., Fernández, V. y Fonollosa, J. (2005).

Los pasos que requiere la aplicación del método son:

Paso 1. Asignar en cada fila y columna una medida de penalización que reste los costos menores en filas y columnas.

Paso 2. En este paso seleccionamos la fila o columna con el número mayor resultado del paso 1, de manera arbitraria se deben romper los resultados iguales, entregando todos los valores posibles a la variable que tenga el mínimo costo en la fila seleccionada.

Paso 3. Como tercer y último paso, hay que tener en cuenta una serie de reglas finales. Si queda solo una fila se detiene el algoritmo. Si esta tiene valores positivos, hay que determinar las variables básicas de la solución. En caso contrario, se vuelve al punto primero y se reinicia el proceso Sallán, J., Suñé, A., Fernández, V. y Fonollosa, J. (2005).

4.1.3.4 Método de Russel

Considerado otro de los métodos de programación lineal empleado para la solución inicial de los problemas de transporte es el método de Russel. El método requiere de amplio conocimiento para al final conseguir una solución óptima; es decir, una solución muy cercana a la esperada, esto se logra a medida que se va entendiendo el procedimiento del método Russel, pero debido a esto, no lo hace el método más utilizado en problemas de transporte.

Método similar al Vogel, en cuanto a la aproximación de la solución óptima que generan, sin embargo, menos popular por requerir mayor cantidad de trabajo.

El método calcula antes de cada asignación la cantidad Δij para cada casilla libre disponible, conforme a la siguiente ecuación:

$$\Delta ij = \alpha i + \beta j - Cij \tag{4.1}$$

Donde:

Δij: Coeficiente del renglón i, columna j;

αi: Costo mayor del renglón i;

βj: Costo mayor de la columna j;

Cij: Costo del renglón i, columna j.

Para cada renglón de origen *i* se irá asignando el mayor costo unitario (*Cij*) de los que quedan en ese renglón. Para cada columna de destino que todavía está bajo consideración, se determina βj, su mayor costo unitario de los que hay en esa columna.

Para cada variable xij que no haya sido seleccionada en estos renglones o columnas, se calcula: $\Delta ij = Cij - \alpha i - \beta j$. Se elige la variable con el mayor valor negativo (en términos absolutos) de Δij. (Los empates se pueden romper arbitrariamente).

Los pasos fundamentales que considera Russell en su método para encontrar una solución inicial básica factible para un problema de transporte, mantienen la siguiente secuencia lógica:

Paso 1. Se calcula Δij para el total de las celdas vacías de la tabla de transporte.

Paso 2. En la celda que haya tenido el mayor valor de Δij, se hace la máxima asignación posible. Esto provoca el agotamiento de la oferta del renglón y/o la demanda de la columna. De haber varias celdas empatadas con el máximo valor de Δij, arbitrariamente se selecciona una de ellas.

Paso 3. Se elimina de la matriz la fila que haya quedado satisfecha en el paso anterior.

Paso 4. Finalmente, se repite el procedimiento (pasos 1 al 3) hasta terminar las asignaciones en toda la tabla como lo señala Izar, J. (2012).

Los distintos métodos de programación lineal se los puede recrear mediante softwares especializados como el WINQSB, que facilitan el cálculo del costo del transporte.

4.2 TRANSPORTE

El transporte es el medio por el cual se traslada cierta cantidad de bienes desde un punto de origen hasta el lugar de destino. Los criterios de clasificación son:

a. Según los medios

Ferrocarril, marítimo-fluvial, por carretera, aéreo y multimodal.

b. Según la propiedad

Propios y ajenos.

c. Según la ubicación de los clientes

Local, regional, nacional, internacional, de acuerdo a Mauleón, M. (2006).

Para el caso objeto de estudio se abordó puntualmente el transporte terrestre de carga.

4.2.1 Transporte terrestre de carga

El transporte de carga es una de las actividades más usuales dentro de la economía ecuatoriana, emplea vehículos de carga liviana y pesada en sentido proveedor-cliente, como cliente-proveedor complementando la cadena de suministros de la región y el país Ballou, R. (2004).

4.2.2 Sistema vial ecuatoriano

4.2.2.1 Red Vial Nacional

La red vial nacional está compuesta por el conjunto de carreteras y caminos del Ecuador, mismos que son de propiedad pública sujetos a la normatividad y marco institucional vigente. Se clasifica en red primaria y secundaria, denominada red nacional; más las redes terciaria y vecinal, llamada red provincial.

En la tabla 4.2. se muestra la red vial según la categoría del camino:

Red Vial Nacional según categoría de camino		
Clasificación de caminos	**Longitud (km)**	**% total de la red**
Caminos primarios	5 608,84	12,98
Caminos secundarios	3 876,42	8,97
Caminos terciarios	11 105,93	25,71
Caminos vecinales	22 153,98	51,29
Caminos locales	452,20	1,05
TOTAL	**43 197,37**	**100,0**

Tabla 4.2. Red vial nacional según categoría de camino.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Sin tomar en consideración los caminos locales, la longitud total de la red se aproxima a los 42 800 km, la mayor extensión se encuentra en la Sierra; es decir, la región interandina del país, una de las cuatro en las que se divide el Ecuador.

El 12 % de la red vial total está pavimentada y el 57 % con superficie de rodadura afirmada; es decir, está integrada por capas que soportan carga pesada. Entre ambos aseguran la movilización continua durante todo el año entre las regiones del país; sin embargo, algo más de la cuarta parte de la red son caminos de tierra, presentan condiciones precarias; la mayor parte pertenece a caminos terciarios y vecinales.

En la figura 4.2. se puede observar la red vial nacional ecuatoriana.

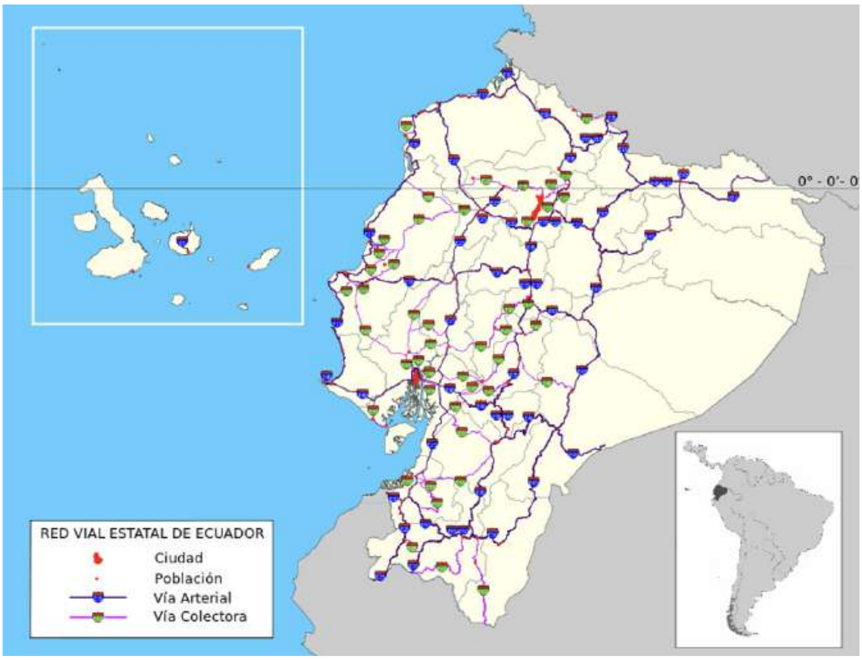


Figura 4.2. Red vial nacional ecuatoriana.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Las carreteras primarias o corredores arteriales comprenden rutas que conectan cruces de frontera, puertos y capitales de provincia. En total existen 12 vías, carreteras primarias en Ecuador, registradas con la letra E en la nomenclatura del país, que suman 5 120 km.

Ruta	Nombre	Tramo	Extensión (km)
E5	Troncal Insular	Baltra-Bellavista-Puerto Ayora	38
E10	Transversal Fronteriza	San Lorenzo-San Gabriel-Nueva Loja-Puerto El Carmen de Putumayo.	453
E15	Troncal del Pacífico	Mataje-Esmeraldas-Bahía de Cará-quez-Manta-Salinas.	741
E20	Transversal Norte	Esmeraldas-Sto. Domingo-Sangolquí-Baeza-Puerto Francisco de Orellana.	336
E25	Troncal de la Costa	Los Bancos-Sto. Domingo-Quevedo-Milagro-Machala-Zapotillo.	664
E25A	Troncal de la Costa Alterna	Santo Domingo	10
E30	Transversal Central	Manta-Portoviejo-Quevedo-Latacunga-Ambato-Puyo.	438
E35	Troncal de la Sierra	Rumichaca-Quito-Ambato-Riobamba-Cuenca-Loja-Macará.	781
E40	Transversal Austral	Colibrí Salinas-Guayaquil-La Troncal-Azogues-Santiago. de Méndez Puerto Morona.	649
E45	Troncal Amazónica	Gral. Farfán-Nueva Loja-Tena-Puyo-Macas-Zamora	701
E45A	Troncal Amazónica Alterna	Nueva Loja-Los Sachas-Puerto Francisco de Orellana-Loreto-Cotundo.	85
E50	Transversal Sur	Huaquillas-Arenillas-Catamayo-Loja-Zamora.	224

Tabla 4.3. Vías primarias en Ecuador.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

De la tabla anterior, se puede indicar que la compañía de transporte pesado interprovincial Jaime Roldós Aguilera S.A., para el transporte de productos agrícolas hace uso de las vías primarias, en el punto de origen, Riobamba se encuentra en la troncal de la sierra y en el destino a través de la transversal austral, la troncal de la Costa, y la transversal sur, cubriendo una distancia en la ruta Riobamba – Guayaquil de 230,3 km; Riobamba – Machala, 313,2 km y Riobamba Huaquillas, 370,2 km.

4.2.3 Condiciones geográficas

La cordillera de los Andes atraviesa al Ecuador de norte a sur, dividiendo al territorio nacional en tres regiones naturales que son: La Costa o Región Litoral, la Sierra o Región Interandina y la Amazonía o Región Oriental, además de valles y llanuras con una variedad de climas, misma que ayuda a la especialización de la producción agrícola. Así mismo, esta geografía diversa trae consigo factores de adversidad para el acceso a las principales ciudades del país convirtiéndose en barreras para el desarrollo de la infraestructura del transporte.

La tabla 4.4. muestra los datos geográficos de las rutas que recorren los productos agrícolas transportados por la compañía de transporte pesado interprovincial Jaime Roldós Aguilera S.A.

Datos Geográficos Ecuador		
Superficie	256 370 km^2	
Población	18 millones de habitantes (INEC 2022)	
Clima	Seco	
	Tropical – húmedo	
	Tropical – monzón	
	Tropical – sabanas	
	Mesotérmico – húmedo	
Límites	Norte: Colombia	Sur: Perú
	Este: Perú	Oeste: Océano Pacífico
Moneda	Dólar estadounidense	
Riobamba		
Superficie	990 km^2	
Población	156 723 hab. (censo INEC 2010)	
Clima	Frío	
Límites	Norte: cantones Guano y Penipe.	Sur: cantones Colta y Guamote.
	Este: cantón Chambo y provincia de Morona Santiago.	Oeste: provincias de Bolívar y Guayas.
Guayaquil		
Superficie	344.5 km^2	
Población	2 278 700 hab. (censo INEC 2010)	
Clima	tropical cálido y húmedo	

Límites	Norte: cantones Lomas de Sargentillo, Nobol, Daule, y Samborondón.	Sur: Golfo de Guayaquil y de las provincias de El Oro y del Azuay.
	Este: cantones Durán, Naranjal y Balao.	Oeste: provincia de Santa Elena y el cantón Playas.
Machala		
Superficie	66,5 km²	
Población	600 659 hab.	
Clima	Tropical	
Límites	Norte: cantón El Guabo.	Sur: cantón Santa Rosa.
	Este: cantones Pasaje y Santa Rosa.	Oeste: Archipiélago de Jambelí.
Huaquillas		
Superficie	72 km²	
Población	48 285 hab.	
Clima	Tropical	
Límites	Norte: cantón Arenillas	Sur: República del Perú
	Este: cantón Arenillas	Oeste: Archipiélago de Jambelí

Tabla 4.4. Datos geográficos de las rutas por las que recorren los productos agrícolas.
Fuente: Sistema Nacional de Información (2022).

4.2.4 Peajes

Las rutas Riobamba - Guayaquil, Riobamba – Machala y Riobamba – Huaquillas tienen en su recorrido 2 estaciones de peaje, el peaje de El Triunfo y el peaje de Durán – Tambo, mismos que se manejan como se observa en la tabla 4.5:

Tipo de vehículo	Tarifa ($)
Automóviles o camionetas	1,00
Buses y camiones (2 ejes)	2,00
Buses y camiones (3 ejes)	3,00
Camiones (4 ejes)	4,00
Camiones (5 ejes)	5,00
Camiones (6 ejes) o más	6,00
Motos	0,20
Remolques livianos	0,50

Tabla 4.5. Tarifas de los peajes.
Fuente: PANAVIAL (2022).

4.2.5 Seguro de carga y del vehículo

Según lo determina el Reglamento a la Ley de Transporte Terrestre, Tránsito y Seguridad Vial en el Ecuador, las compañías de transporte deben contar con un seguro obligatorio para impedir el robo del vehículo o de su carga, el mismo que se constituye como elemento para el normal ejercicio de las compañías del sector transportador, de esta manera se cubren los posibles riegos a los que están expuestos al momento de transportar las mercancías.

4.3 ESCENARIO

Visualizar las variables que intervienen en el proceso de transporte de carga pesada agrícola en el caso de estudio: Riobamba – Guayaquil, Riobamba – Machala y Riobamba - Huaquillas, se consideró dos elementos fundamentales: punto de origen o carga y punto de destino o descarga, clarificando las variables que forman parte del proceso de transportación, situación que se muestra en la figura 4.3.

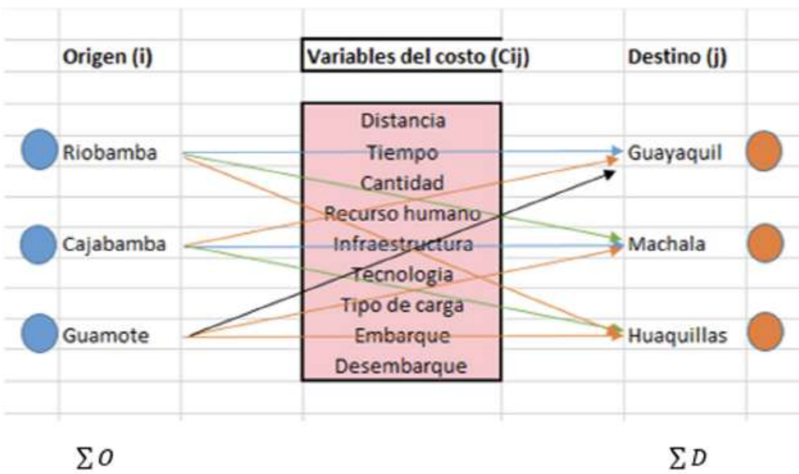


Figura 4.3. Canal logístico de la transportación de carga agrícola.

En las figuras 4.4. a la 4.12. se observa el mapa del Ecuador, en el destaca las rutas Riobamba – Guayaquil, Riobamba – Machala, Riobamba – Huaquillas, Cajabamba – Guayaquil, Cajabamba – Machala, Cajabamba – Huaquillas, Guamote – Guayaquil, Guamote – Machala y Guamote – Huaquillas.

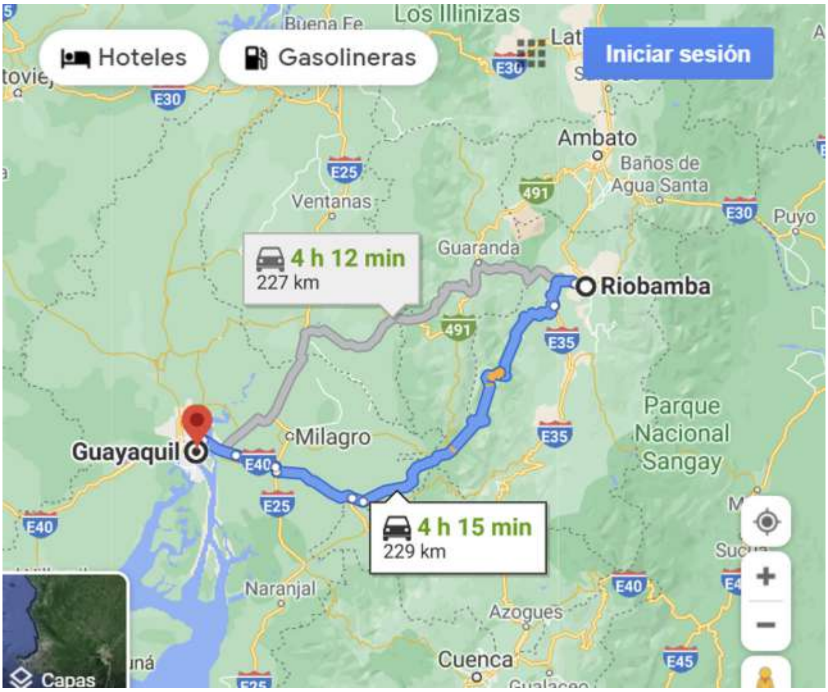


Figura 4.4. Ruta Riobamba – Guayaquil.
Fuente: Sistema Nacional de Información (2022).

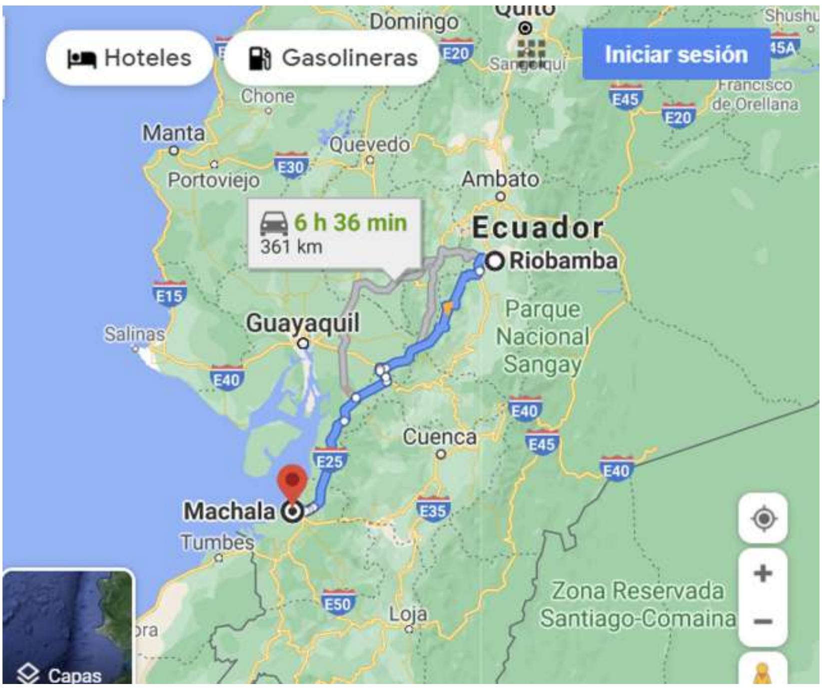


Figura 4.5. Ruta Riobamba – Machala.
Fuente: Sistema Nacional de Información (2022).

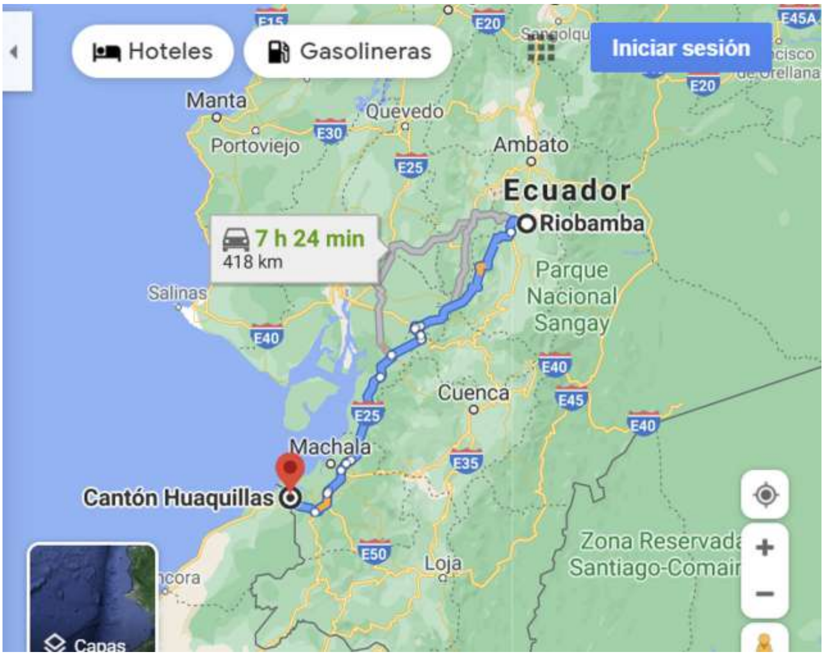


Figura 4.6. Ruta Riobamba – Huaquillas.
Fuente: Sistema Nacional de Información (2022).

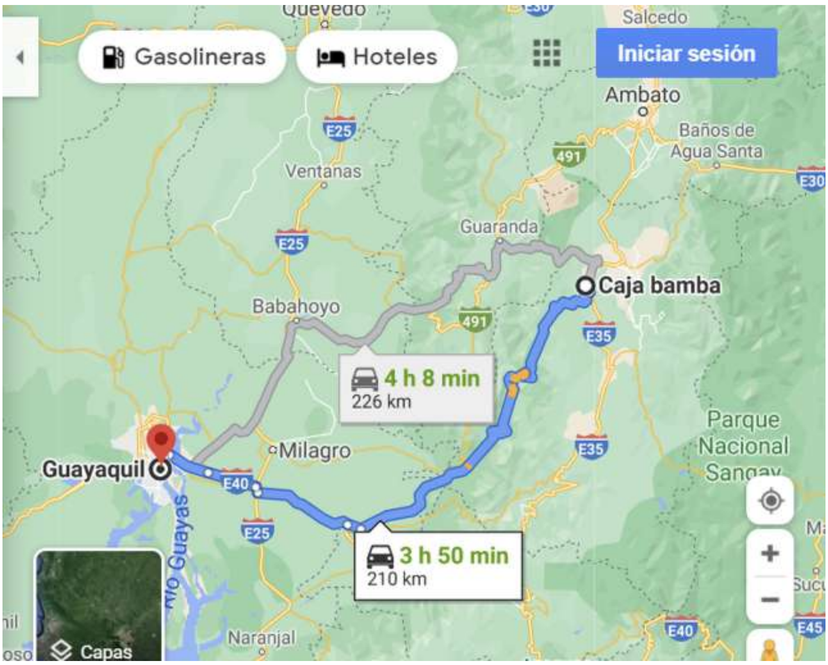


Figura 4.7. Ruta Cajabamba – Guayaquil.
Fuente: Sistema Nacional de Información (2022).

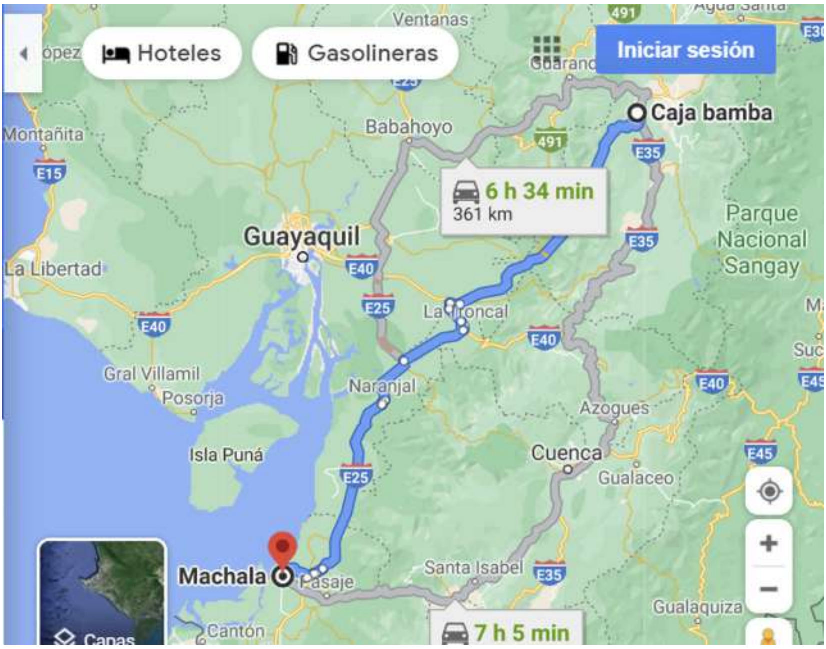


Figura 4.8. Ruta Cajabamba – Machala.
Fuente: Sistema Nacional de Información (2022).

Figura 4.9. Ruta Cajabamba – Huaquillas.
Fuente: Sistema Nacional de Información (2022).

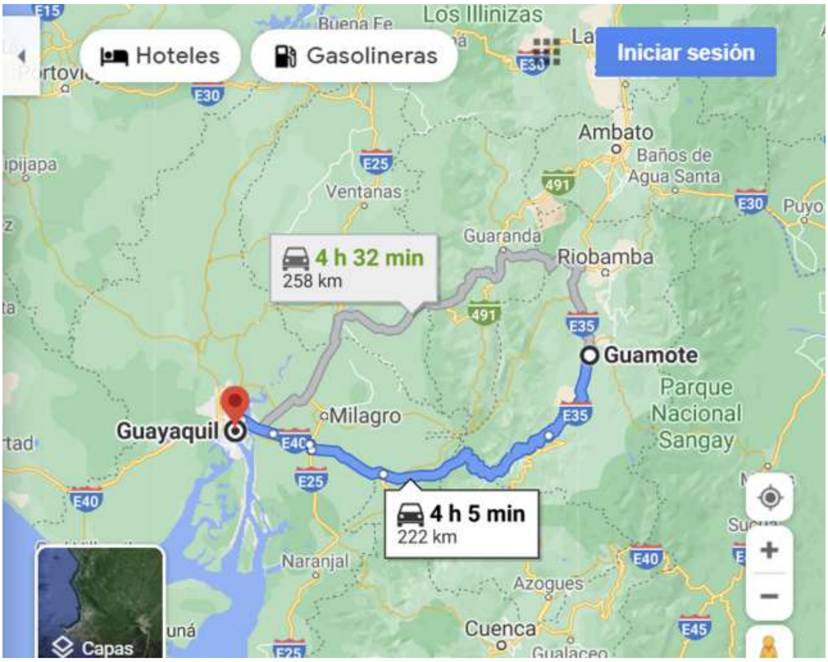


Figura 4.10. Ruta Guamote – Guayaquil.
Fuente: Sistema Nacional de Información (2022).

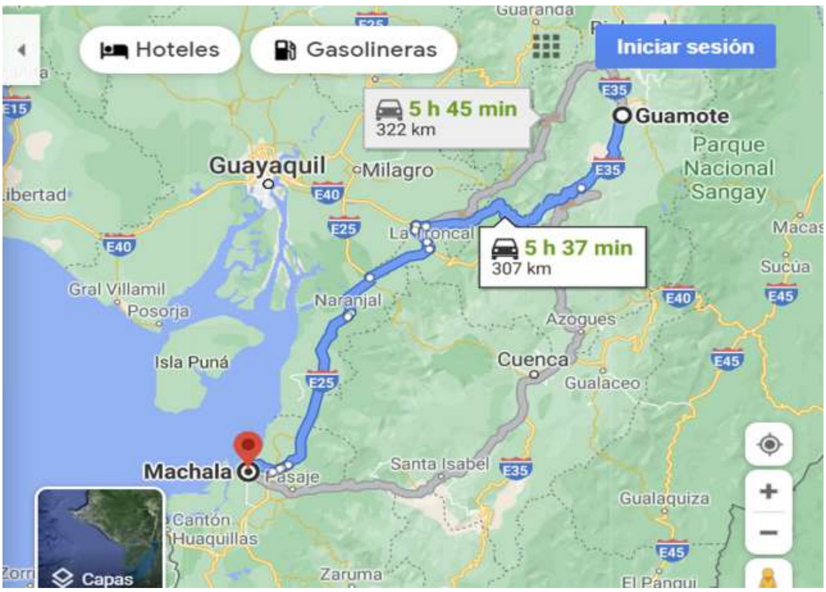


Figura 4.11. Ruta Guamote – Machala.
Fuente: Sistema Nacional de Información (2022).

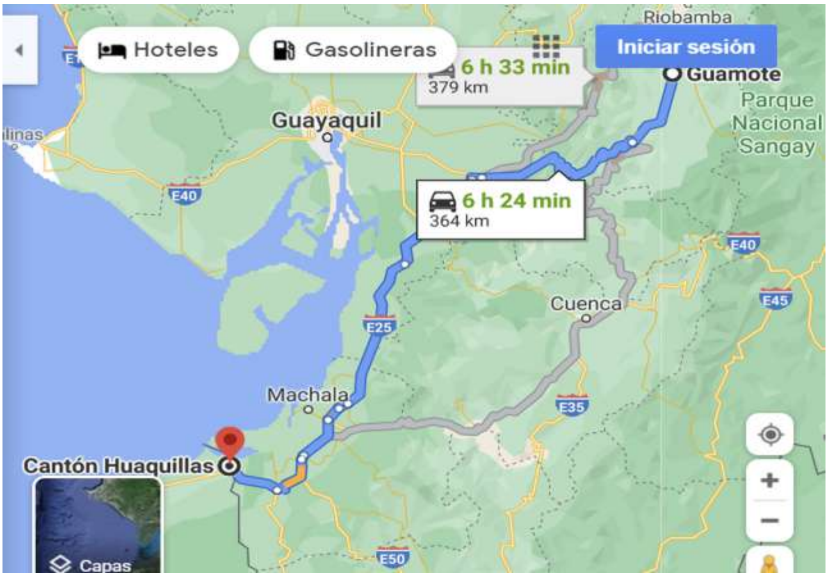


Figura 4.12. Ruta Guamote – Huaquillas.
Fuente: Sistema Nacional de Información (2022).

4.3.1 Tipo de carga

Al hablar de carga, entendemos que es un conjunto de bienes o mercancías que se movilizan desde un punto de origen hacia un punto de destino. Para el caso de estudio, constituyen mercancías transportables, productos agrícolas de la serranía desde los puntos de carga en la provincia de Chimborazo. Entre los tipos de carga se destacan los siguientes:

1. Los de característica general y las de distinta naturaleza que se transportan conjuntamente, aquí se identifican bultos, quintales y cajas de los cuales hablaremos posteriormente.

2. Los perecibles, hortalizas y legumbres, tubérculos, gramíneas, frutas de la serranía, entre otros.

4.3.2 Tipos de vehículos

La transportación de carga es muy importante en Ecuador, con ella se garantiza la distribución de alimentos que requieren las distintas localidades o las ciudades del país.

Esta actividad es generadora de economía nacional, semanalmente se mueven alrededor de 162 toneladas de productos agrícolas en las rutas de estudio, tonelaje que se transporta en vehículos de dos y tres ejes, como se detalla en la tabla 4.6.

Vehículo	Descripción
Camión rígido de dos ejes. Camión sencillo	Capacidad de carga 18 toneladas.
Camión rígido de tres ejes	Capacidad de carga 24 toneladas.

Tabla 4.6. Tipos de vehículos de carga para la transportación de productos agrícolas.
Fuente: Aranda, A. (2023).

4.3.3 Clase de Vehículo de Carga

Clase del vehículo		Capacidad de Carga (Toneladas)
	Turbo	3,83
	Turbo	4
	Turbo	4,5
	Sencillo	7,5
	Sencillo	8
	Camión rígido	12
	Camión rígido	18
	Camión rígido	24
	Tracto-Camión	33

Tabla 4.7. Clase de Vehículo de Carga.
Fuente: Aranda, A. (2023).

4.4 COSTOS

4.4.1 Costos del Transporte

Dentro del proceso de transportación se consideran varios costos: combustible, mantenimiento, rodamientos, lubricantes, mano de obra, entre otros. Los costos pueden dividirse en fijos y variables, los primeros no están relacionados directamente con el volumen de carga, mientras que los segundos tienen que ver directamente con éste; sin embargo, se puede decir que todos los costos son parcialmente fijos y parcialmente variables por cuanto no existe una asignación precisa entre ellos Carreño, A. (2018).

4.4.2 Clasificación de los costos

Bajo el criterio de Hernández, L. (2018), los costos operativos de transporte de carga por carretera consideran factores como: frecuencia de ocurrencia del costo y el valor asignado a cada costo, que dan como resultado el costo por movilizar una tonelada de carga por kilómetro recorrido.

En la tabla 4.8. se muestran algunas diferencias entre los costos fijos y variables en el transporte:

Costos Fijos	Costos Variables
Salario conductor IESS Aporte patronal Fondos de Reserva Décimo Tercer Sueldo Décimo Cuarto Sueldo Vacaciones Seguro de vehículo Matrícula de vehículo Depreciaciones Amortizaciones Viáticos Peajes	Precio de Combustible Llantas Mantenimiento del vehículo x viaje Baterías Imprevistos

Tabla 4.8. Clasificación de los Costos.
Fuente: Hernández, L. (2018).

4.4.2.1 Costos fijos

Aquellos costos que no varían en función al volumen de carga, pero que son necesarios para el establecimiento del negocio de la transportación.

- Salario conductor: representa el valor monetario que perciben las personas que conducen los vehículos transportadores de carga del origen al destino, por la labor realizada. Para el caso de estudio se consideró al conductor y relevista del conductor.

$$Salario \ = Salario\ mínimo + Factor\ Prestacional \tag{4.2}$$
$$Salario = 600{+}300$$
$$Salario = 900$$

Fuente: Ministerio de Trabajo (2022).

Salario Básico

En el Ecuador, el salario mínimo vital estipulado para el ejercicio fiscal 2023 es de $ 450 El salario por viaje es de $ 112,50.

- **IESS Aporte patronal:** De acuerdo a la legislación ecuatoriana, en el sector privado el aporte patronal es del 11,15 % de la remuneración percibida por el trabajador.

Rubros	Valor ($)
Remuneración mensual	900,00
Aporte patronal	11,15 %
Valor Aporte patronal mensual	**100,35**

Tabla 4.9. Cálculo Aporte patronal.
Fuente: Aranda (2023).

Para armar la matriz de costos por viaje, se contempló el valor correspondiente por viaje, que representa un aporte de $ 12,54.

- **Fondos de reserva:** Estos fondos constituyen el trabajo capitalizado que cada trabajador va acumulando a través de los años y que, de acuerdo a la legislación ecuatoriana, los fondos de reserva constituyen el 8,33 % de la remuneración percibida por el trabajador.

Rubros	Valor ($)
Remuneración mensual	900,00
Aporte patronal	8,33 %
Valor Aporte patronal mensual	**74,97**

Tabla 4.10. Cálculo de los Fondos de reserva.
Fuente: Aranda (2023).

En cuanto a la matriz de costos por viaje, se tomó el valor correspondiente a un viaje, que representa $ 9,37.

- **Décimo tercer sueldo:** Beneficio social de ley vigente en el Ecuador desde 1962. Es el resultado de la suma de las remuneraciones percibidas por el trabajador que van desde el 01 de diciembre del ejercicio fiscal anterior al que se pretende calcular hasta el 30 de noviembre del año en que se realiza el cálculo, dividido para 12. Para el caso de estudio, el décimo tercer sueldo es de $ 900.

De igual forma, para el cálculo de los costos de transporte por viaje se consideró el valor correspondiente a un viaje, considerando que se efectúan 8 viajes al mes, que para el caso de estudio representa $ 9,38.

- **Décimo cuarto sueldo:** también conocido como bono escolar, es el valor que perciben mensualmente los trabajadores y corresponde a la doceava parte de la remuneración básica mínima unificada, que para el año 2023 equivale a $ 450.

Respecto a este rubro, para el cálculo de los costos de transporte se consideró el valor correspondiente a un viaje, que representa $ 4,69.

- **Vacaciones:** corresponde un derecho que tiene todo trabajador que ha cumplido un año de trabajo con el mismo empleador. Es el resultado de dividir la remuneración durante el año de servicio para veinticuatro (24). En esta variable de costo, el valor proporcional a un viaje es de $ 4,69.

- **Seguro del vehículo:** siendo necesario proteger el vehículo y la mercancía transportada, se requiere contratar una póliza de seguros. Por su parte la compañía de transporte pesado interprovincial Jaime Roldós Aguilera, S.A., salvaguarda a todos sus vehículos asegurándolos por los diferentes peligros a los que están expuestos en las vías.

La prima que la compañía paga por es de $ 175,99 mensuales, cuyo costo por viaje representa $ 22. Aseguradora del Sur (2023).

- **Matrícula del vehículo:** está constituido en función del valor comercial del vehículo y es extensible para todos los vehículos.

$$\text{Matrícula del vehículo} = \%\ \text{Avaluo}\ \frac{\mathit{Marca,tipo\ de\ vehículo,capacidad,modelo}}{12} \tag{4.3}$$

Fuente: Agencia Nacional de Tránsito del Ecuador (2022).

Considerando que el vehículo transportador de carga de 18 toneladas en el mercado tiene un valor comercial de \$ 48 990, de acuerdo a la legislación ecuatoriana, el Servicio de Rentas Internas establece que el impuesto a los vehículos motorizados constituye el 6% de su valor; por lo tanto, se obtuvo lo siguiente:

Vehículo de 18 toneladas

$$\mathit{Matrícula\ del\ vehículo} = 6\% \frac{\$\ 48\ 990}{12}$$
$$\mathit{Matrícula\ del\ vehículo} = \$\ 244{,}95$$

Para el vehículo de 18 toneladas, el valor para esta variable de costo por viaje es de \$2,55.

- **Depreciaciones:** Es la pérdida del valor del automotor a causa del desgaste por su uso. El cálculo de la depreciación se muestra en la tabla 4.11.

Nombre del Activo fijo:	Vehículo 18 toneladas	**Depreciación (tipo):**	Línea recta
Vida útil:	5 años	**10% del Valor residual (\$):**	4 899,00
Valor del activo_ costo (\$):			48 990,00
N° de periodos	**Depreciación anual (\$)**	**Depreciación acumulada (\$)**	**Valor en libros (\$)**
0			48 990,00
1	8 818,20	8 818,20	40 171,80
2	8 818,20	17 636,40	31 353,60
3	8 818,20	26 454,60	22 535,40
4	8 818,20	35 272,80	13 717,20
5	8 818,20	44 091,00	4 899,00

Tabla 4.11. Depreciación vehículo de 18 toneladas.
Fuente: Aranda, A. (2023).

- Amortizaciones: es el valor monetario que hace referencia al proceso de distribución de gasto en el tiempo de un valor duradero. Entre los elementos del equipo de trabajo que pertenecen al vehículo y forman parte de los activos amortizables tenemos la carpa del vehículo transportador, el extintor y artículos varios, éstos se deben amortizar durante su vida útil. Seguidamente se muestran las amortizaciones de los equipos de trabajo.

Amortizaciones vehículo de 18 toneladas

Nombre del Activo fijo:	Carpa	**Depreciación (tipo):**	Línea recta
Vida útil:		3 años	
Valor del activo_ costo ($):			48 990,00
N° de periodos	**Depreciación anual ($)**	**Depreciación acumulada ($)**	**Valor en libros ($)**
0			1 000,00
1	333,33	333,33	666,67
2	333,33	666,67	333,33
3	333,33	1 000,00	-

Tabla 4.12. Amortización de la carpa vehículo 18 toneladas.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Nombre del Activo fijo:	Extintor	**Depreciación (tipo):**	Línea recta
Vida útil:		1 año	
Valor del activo_ costo ($):			48 990,00
N° de periodos	**Depreciación anual ($)**	**Depreciación acumulada ($)**	**Valor en libros ($)**
0			12,00
1	12,00	12,00	-

Tabla 4.13. Amortización del extintor.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Nombre del Activo fijo:	Artículos varios	**Depreciación (tipo):**	Línea recta
Vida útil:		1 año	
Valor del activo_ costo ($):			48 990,00
N° de periodos	**Depreciación anual ($)**	**Depreciación acumulada ($)**	**Valor en libros ($)**
0			5,00
1	5,00	5,00	-

Tabla 4.14. Amortización artículos varios.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Para el vehículo de 18 toneladas, en cuanto a la variable de costo amortizaciones, el valor proporcional a un viaje por cada uno de los equipos de trabajo, suma $ 3,65.

- **Viáticos:** dentro de este rubro, se considera un valor de $ 10 para alimentación por viaje más el valor que se paga por parqueadero. En cuanto al parqueadero, se efectúa el cálculo correspondiente a un viaje.

- **Parqueadero:** Por imprevistos en el recorrido del transporte de la carga, se incurre en gastos de parqueo que a decir de los señores transportistas no se realizan con frecuencia, pero son necesarios.

$$Parqueadero = Valor\ diario * número\ de\ viajes\ al\ mes \tag{4.4}$$

Fuente: Agencia Nacional de Tránsito del Ecuador (2022).

Empleando la fórmula y considerando que los vehículos se transportan con una frecuencia de dos veces por semana se tiene:

$$\text{Parqueadero} = \text{Valor diario} * \text{número de viajes al mes}$$

$$\text{Parqueadero} = 2 * 8 \text{ viajes}$$

$$\text{Parqueadero} = \$\ 16 \text{ al mes}$$

El valor por viaje representa $ 2, para el vehículo de 18 toneladas.

- **Peajes:** representa la sumatoria del valor de los peajes de las rutas objeto de estudio.

En las 9 rutas objeto de estudio existen dos peajes cuyas tarifas dependen de la categoría del automotor que recorre las vías. La empresa emplea vehículos de dos y tres ejes, con un costo por peaje de dos y tres dólares; respectivamente. Por lo tanto, la sumatoria de los peajes de todo un trayecto ida y vuelta dio como resultado: ocho dólares para los vehículos de dos ejes, vehículos objeto de estudio.

4.4.2.2 Costos variables

Aquellos que involucran cada unidad de bien, producto del giro del negocio. En la figura 4.13. se indican los elementos que se consideraron para el cálculo de estos costos.

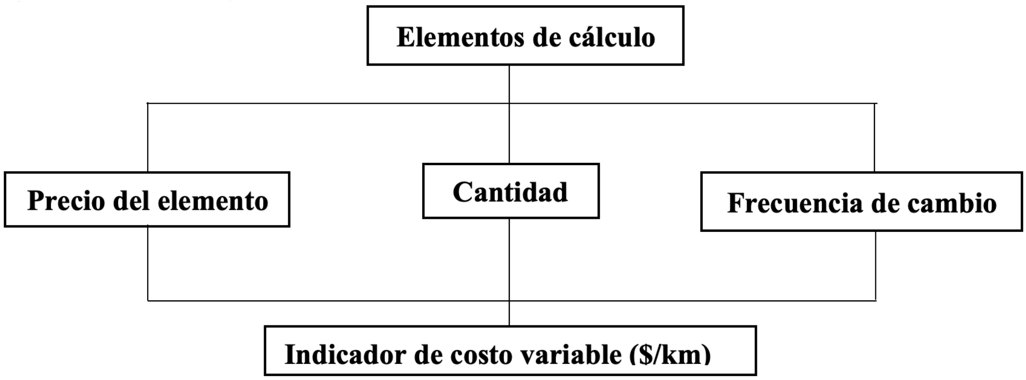


Figura 4.13. Elementos para el cálculo de costos.

- **Precio por consumo de combustible ($/km):** los vehículos de la compañía de transporte pesado interprovincial Jaime Roldós Aguilera, utilizan diésel para el transporte de bienes. El vehículo de 18 toneladas tiene un tanque de combustible con capacidad de 105,8 galones. En la tabla 4.15. se muestra la cantidad de combustible en relación al tipo de vehículo que se empleó en la investigación:

Configuración	Diésel ($)	Rendimiento por km recorrido
Camión rígido de dos ejes (C2)	165,05	12 km/galón

Tabla 4.15. Cantidad de Combustible por tipo de vehículo.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

- Tipos de combustible:

Diésel: en el país, el diésel es el tipo de combustible más utilizado en el transporte de carga pesada, con un precio por galón de $ 1,75.

$$Indicador\ de\ Consumo\ de\ Combustible = \frac{Precio\ \$/Galón}{Consumo\ \ Km/Galón} \quad (4.5)$$

Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Aplicando la fórmula 4.5. se obtuvo el rendimiento del combustible por kilómetro recorrido, recalcando que éste influyó directamente según la carretera por donde recorre el vehículo transportador de carga agrícola.

Vehículo de 18 toneladas

$$Indicador\ de\ Consumo\ de\ Combustible = \frac{Precio\ \$/Galón}{Consumo\ \ Km/Galón}$$

$$Indicador\ de\ Consumo\ de\ Combustible = \frac{\$\ 1{,}75}{12}$$

$$Indicador\ de\ Consumo\ de\ Combustible = 0{,}14$$

En el transporte de mercancías agrícolas, el precio del combustible es un factor crítico, especialmente para los camiones de 18 toneladas que realizan viajes en rutas de estudio. Las fluctuaciones en el precio del combustible debido a cambios en el petróleo crudo, la oferta y demanda, así como factores económicos y políticos, pueden afectar significativamente los costos operativos y el cálculo del valor de cada recorrido. Para tomar decisiones informadas y eficientes, es esencial mantenerse actualizado sobre los precios del combustible y considerar su impacto en el análisis de las rutas en estudio, consultando fuentes confiables para obtener información actualizada sobre los costos del combustible y realizar estimaciones precisas de los gastos en el transporte de carga.

En la tabla 4.16. se especifican las variables determinantes de este costo y el cálculo del valor del recorrido para cada una de las rutas.

Ruta	Distancia (km)	Costo por galón ($)	Rendimiento del galón para camión C2 (km)	Galones utilizados en la ruta para C2	Costo por ruta ida y vuelta para vehículo C2 ($)
Riobamba – Guayaquil	235,1	1,75	12	19,59	68,57
Riobamba – Machala	319,2			26,60	93,10
Riobamba – Huaquillas	397,2			33,10	115,85
Cajabamba – Guayaquil	215,4			17,95	62,83
Cajabamba – Machala	299,5			24,96	87,35
Cajabamba – Huaquillas	377,5			31,46	110,10
Guamote – Guayaquil	270,6			22,55	78,93
Guamote – Machala	354,7			29,56	103,45
Guamote – Huaquillas	432,7			36,06	126,20

Tabla 4.16. Precio de combustible.
Fuente: Aranda, A. (2023).

- **Consumo de llantas ($/Km):** Este se genera por el desgaste del caucho de la llanta por el roce con el asfalto.

$$Indicador\ de\ Consumo\ de\ Llantas = \sum \frac{\text{No llantas} * \text{Precio llanta}}{\text{Duración llanta en Km}} \tag{4.6}$$

Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

En la figura 4.14. se visualiza de manera gráfica los tipos de neumáticos de un vehículo transportador de carga.

Figura 4.14. Tipos de neumáticos: D (Direccional), T (Tracción) y EL (Ejes libres).

En la tabla 4.17. se detallan los parámetros de las llantas de un vehículo transportador.

Parámetro	Tipo de Neumático	Durabilidad (km)
Con parámetro Radial	Direccional	70 000
	Tracción	70 000
	Ejes Libres	120 000
Con parámetro Convencional	Direccional	30 000
	Tracción	37 375
	Ejes Libres	62 000

Tabla 4.17. Parámetros de los neumáticos.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Los camiones de la compañía de transporte utilizan el tamaño de neumáticos radial. Para el camión modelo HFC 1252 KR1 se utilizan 10 llantas. El precio de las llantas es de $ 600,00 cada una, lo que nos da un total de $ 6 000,00. Considerando que el desgaste de las llantas es variable, el cálculo por viaje se detalla en las tablas 4.18. a la 4.26., para cada una de las rutas:

Llantas	Cantidad	Precio Unitario ($)	Precio Total ($)	Duración (km)	Desgaste (km/$)	Distancia recorrida (km)	Valor del desgaste ida y vuelta ($)
Direccional	2	600,00	1 200	70 000	0,02	235,10	8,06
Tracción	4	600,00	2 400	70 000	0,03	235,10	16,12
Ejes Libres	4	600,00	2 400	120 000	0,02	235,10	9,40
						TOTAL	**33,59**

Tabla 4.18. Consumo de llantas ruta Riobamba - Guayaquil.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Llantas	Cantidad	Precio Unitario ($)	Precio Total ($)	Duración (km)	Desgaste (km/$)	Distancia recorrida (km)	Valor del desgaste ida y vuelta ($)
Direccional	2	600,00	1 200	70 000	0,02	319,2	10,94
Tracción	4	600,00	2 400	70 000	0,03	319,2	21,89
Ejes Libres	4	600,00	2 400	120 000	0,02	319,2	12,77
						TOTAL	**45,60**

Tabla 4.19. Consumo de llantas ruta Riobamba - Machala.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Llantas	Cantidad	Precio Unitario ($)	Precio Total ($)	Duración (km)	Desgaste (km/$)	Distancia recorrida (km)	Valor del desgaste ida y vuelta ($)
Direccional	2	600,00	1 200	70 000	0,02	397,2	13,62
Tracción	4	600,00	2 400	70 000	0,03	397,2	27,24
Ejes Libres	4	600,00	2 400	120 000	0,02	397,2	15,89
						TOTAL	**56,74**

Tabla 4.20. Consumo de llantas ruta Riobamba – Huaquillas.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Llantas	Cantidad	Precio Unitario ($)	Precio Total ($)	Duración (km)	Desgaste (km/$)	Distancia recorrida (km)	Valor del desgaste ida y vuelta ($)
Direccional	2	600,00	1 200	70 000	0,02	215,4	7,39
Tracción	4	600,00	2 400	70 000	0,03	215,4	14,77
Ejes Libres	4	600,00	2 400	120 000	0,02	215,4	8,62
						TOTAL	**30,77**

Tabla 4.21. Consumo de llantas ruta Cajabamba – Guayaquil.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Llantas	Cantidad	Precio Unitario ($)	Precio Total ($)	Duración (km)	Desgaste (km/$)	Distancia recorrida (km)	Valor del desgaste ida y vuelta ($)
Direccional	2	600,00	1 200	70 000	0,02	299,5	10,27
Tracción	4	600,00	2 400	70 000	0,03	299,5	20,54
Ejes Libres	4	600,00	2 400	120 000	0,02	299,5	11,98
						TOTAL	**42,79**

Tabla 4.22. Consumo de llantas ruta Cajabamba – Machala.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Llantas	Cantidad	Precio Unitario ($)	Precio Total ($)	Duración (km)	Desgaste (km/$)	Distancia recorrida (km)	Valor del desgaste ida y vuelta ($)
Direccional	2	600,00	1 200	70 000	0,02	377,5	12,94
Tracción	4	600,00	2 400	70 000	0,03	377,5	25,89
Ejes Libres	4	600,00	2 400	120 000	0,02	377,5	15,10
						TOTAL	**53,93**

Tabla 4.23. Consumo de llantas ruta Cajabamba – Huaquillas.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Llantas	Cantidad	Precio Unitario ($)	Precio Total ($)	Duración (km)	Desgaste (km/$)	Distancia recorrida (km)	Valor del desgaste ida y vuelta ($)
Direccional	2	600,00	1 200	70 000	0,02	270,6	9,28
Tracción	4	600,00	2 400	70 000	0,03	270,6	18,56
Ejes Libres	4	600,00	2 400	120 000	0,02	270,6	10,82
						TOTAL	**38,66**

Tabla 4.24. Consumo de llantas ruta Guamote – Guayaquil.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Llantas	Cantidad	Precio Unitario ($)	Precio Total ($)	Duración (km)	Desgaste (km/$)	Distancia recorrida (km)	Valor del desgaste ida y vuelta ($)
Direccional	2	600,00	1 200	70 000	0,02	354,7	12,16
Tracción	4	600,00	2 400	70 000	0,03	354,7	24,32
Ejes Libres	4	600,00	2 400	120 000	0,02	354,7	14,19
						TOTAL	**50,67**

Tabla 4.25. Consumo de llantas ruta Guamote – Machala.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Llantas	Cantidad	Precio Unitario ($)	Precio Total ($)	Duración (km)	Desgaste (km/$)	Distancia recorrida (km)	Valor del desgaste ida y vuelta ($)
Direccional	2	600,00	1 200	70 000	0,02	432,7	14,84
Tracción	4	600,00	2 400	70 000	0,03	432,7	29,67
Ejes Libres	4	600,00	2 400	120 000	0,02	432,7	17,31
						TOTAL	**61,81**

Tabla 4.26. Consumo de llantas ruta Guamote – Huaquillas.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Mantenimiento ($/km): el mantenimiento del vehículo transportador es un indicador que hace referencia al costo que se paga con fines de conservar el equipo automotor. Este incluye factores que van mucho más allá del cambio de combustible, entre los que se tiene se enuncia los siguientes: motor, suspensión, tráiler, rodamientos, caja de velocidad, diferencial, embrague, dirección, frenos, eléctricos, inyección, entre otros. Dicho mantenimiento se realiza de manera semestral, lo que implica un mantenimiento bianual, mismo que se específica en la tabla 4.27.

No. de unidades	Detalle	Costo Unitario ($)	Costo Total ($)
2	Pasadores para barra de dirección	1,50	3,00
1	Canastilla negra	30,00	30,00
3	Cambio de Canastilla	58,00	174,00
1	Retenedor delantero de caja	28,00	28,00
1	Limpieza y calibración del plato de embrague	15,00	15,00
1	Hidráulicos y cambio	7,00	7,00
1	Rulimán de embrague	28,00	28,00
2	O-ring secador de aire	7,00	14,00
1	O-ring del freno de maquina (limpieza y lubricación)	19,00	19,00
1	Limpieza de secador de aire	17,00	17,00
1	Instalación de rodelas en los dos paquetes delanteros	22,00	22,00
4	Rodelas en paquetes delanteros	6,00	24,00
1	Arreglo barra de dirección	25,00	25,00
1	Calibración de válvulas	30,00	30,00
1	Aditivo	12,00	12,00
1	Codificar Computadora	18,00	18,00
1	Mano de obra del secador de aire	18,00	18,00
1	Fijador de roscas líquido	6,00	6,00
1	Manguera rulimán embrague	28,00	28,00
1	Manguera desfogue	15,00	15,00
1	Cambio de O-ring (anillo de goma utilizado como un sello)	15,00	15,00
1	Suministros	10,00	10,00
		Subtotal ($)	**558,00**
		12% IVA	**66,96**
		Total ($)	**624,96**

Tabla 4.27. Descripción mantenimiento semestral vehículo 18 toneladas.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Dado que el mantenimiento se realiza dos veces al año, a la compañía el mantenimiento de un vehículo con capacidad de 18 toneladas anualmente le cuesta $ 1 249,92, de manera mensual esta variable de costo representa para la compañía $ 104, 16 y como el vehículo se moviliza 3 veces por semana; es decir, 8 veces al mes esto representa $ 13,02.

A esta variable hay que sumarle el mantenimiento mensual que se realiza a los vehículos transportadores por concepto de lavado y engrase.

No. de unidades	Detalle	Costo Unitario ($)	Costo Total ($)
1	Aceite sintético motor	22,00	22,00
1	Aceite caja	11,00	11,00
1	Aceite transmisión	4,58	4,58
1	Aceite dirección	9,00	9,00
3	Filtros de Aceite	9,45	28,35
3	Filtros de Combustible	11,99	35,97
1	Filtro de agua	12,99	12,99
1	Filtro de aire	7,99	7,99
1	Lavado, pulverizado y engrasado	20,00	20,00
1	Mano de obra	18,00	18,00
		Subtotal ($)	**169,88**
		12% IVA	**20,39**
		Total ($)	**190,27**

Tabla 4.28. Servicio de lavado – engrase vehículos 18 toneladas.
Fuente: Aranda (2023).

El costo de mantenimiento mensual por vehículo es de $ 190,27, sabiendo que los mismos realizan 8 viajes mensuales, el costo por viaje representa $ 23,78.

- **Baterías:** se emplean dos baterías al año marca BOSCH, cotizado el costo de las baterías, su costo asciende a $ 130 cada una, dándonos un total de $ 260.

Baterías	Cantidad	Precio Unitario ($)	Total ($)
BOSCH 30H HD	2	130,00	260,00

Tabla 4.29. Precio de las Baterías.
Fuente: Aranda, A. (2023).

Mensualmente, el valor de esta variable de costo es de $ 21,67, y por viaje el costo es de $2,71.

- **Imprevistos:** son aquellos costos no pronosticados pero que pueden ocurrir en el trayecto de la ruta del vehículo transportador. Para el cálculo de los mismos, se estima el 10 % del costo total.

$$Indicador\ de\ Imprevistos = \%\sum \text{Costos Totales} \tag{4.7}$$

Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

El cálculo por imprevistos se integró directamente en la tabla de costos por viaje, en razón que no representa un cálculo de mayor complejidad, el mismo oscila alrededor de $ 32,00.

4.5 DISTANCIA

La carretera de las rutas en estudio (Riobamba – Guayaquil, Riobamba – Machala, Riobamba – Huaquillas, Cajabamba – Guayaquil, Cajabamba – Machala, Cajabamba – Huaquillas, Guamote – Guayaquil, Guamote – Machala y Guamote - Huaquillas) tiene en general un buen estado, por donde se moviliza gran afluencia de tráfico pesado, con la presencia de dos peajes. La distancia por cada una de las rutas se muestra en las tablas 4.30. a la 4.38.:

Punto de carga (origen)	Punto de descarga (destino)	Distancia del punto de carga al punto de descarga (km)	Distancia acumulada (km)
Riobamba	Cajabamba	19,7	19,7
Cajabamba	Pallatanga	70	89,7
Pallatanga	Cumandá	38,9	128,6
Cumandá	El Triunfo	38	166,6
El Triunfo	Duran	52,4	219
Duran	Guayaquil	16,1	235,1

Tabla 4.30. Matriz de distancias ruta Riobamba – Guayaquil.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Punto de carga (origen)	Punto de descarga (destino)	Distancia del punto de carga al punto de descarga (km)	Distancia acumulada (km)
Riobamba	Cajabamba	19,7	19,7
Cajabamba	Pallatanga	70	89,7
Pallatanga	Cumandá	38,9	128,6
Cumandá	El Triunfo	38	166,6
El Triunfo	Naranjal	60,9	227,5
Naranjal	Machala	91,7	319,2

Tabla 4.31. Matriz de distancias ruta Riobamba – Machala.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Punto de carga (origen)	Punto de descarga (destino)	Distancia del punto de carga al punto de descarga (km)	Distancia acumulada (km)
Riobamba	Cajabamba	19,7	19,7
Cajabamba	Pallatanga	70	89,7
Pallatanga	Cumandá	38,9	128,6
Cumandá	El Triunfo	38	166,6
El Triunfo	Naranjal	60,9	227,5
Naranjal	Machala	91,7	319,2
Machala	Santa Rosa	32,7	351,9
Santa Rosa	Huaquillas	45,3	397,2

Tabla 4.32. Matriz de distancias ruta Riobamba – Huaquillas.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Punto de carga (origen)	Punto de descarga (destino)	Distancia del punto de carga al punto de descarga (km)	Distancia acumulada (km)
Cajabamba	Pallatanga	70	70
Pallatanga	Cumandá	38,9	108,9
Cumandá	El Triunfo	38	146,9
El Triunfo	Duran	52,4	199,3
Duran	Guayaquil	16,1	215,4

Tabla 4.33. Matriz de distancias ruta Cajabamba – Guayaquil.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Punto de carga (origen)	Punto de descarga (destino)	Distancia del punto de carga al punto de descarga (km)	Distancia acumulada (km)
Cajabamba	Pallatanga	70	70
Pallatanga	Cumandá	38,9	108,9
Cumandá	El Triunfo	38	146,9
El Triunfo	Naranjal	60,9	207,8
Naranjal	Machala	91,7	299,5

Tabla 4.34. Matriz de distancias ruta Cajabamba – Machala.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Punto de carga (origen)	Punto de descarga (destino)	Distancia del punto de carga al punto de descarga (km)	Distancia acumulada (km)
Cajabamba	Pallatanga	70	70
Pallatanga	Cumandá	38,9	108,9
Cumandá	El Triunfo	38	146,9
El Triunfo	Naranjal	60,9	207,8
Naranjal	Machala	91,7	299,5
Machala	Santa Rosa	32,7	332,2
Santa Rosa	Huaquillas	45,3	377,5

Tabla 4.35. Matriz de distancias ruta Cajabamba – Huaquillas.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Punto de carga (origen)	Punto de descarga (destino)	Distancia del punto de carga al punto de descarga (km)	Distancia acumulada (km)
Guamote	Alausí	70	70
Alausí	Chunchi	36	106
Chunchi	El Triunfo	96,1	202,1
El Triunfo	Duran	52,4	254,5
Duran	Guayaquil	16,1	270,6

Tabla 4.36. Matriz de distancias ruta Guamote – Guayaquil.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Punto de carga (origen)	Punto de descarga (destino)	Distancia del punto de carga al punto de descarga (km)	Distancia acumulada (km)
Guamote	Alausí	70	70
Alausí	Chunchi	36	106
Chunchi	El Triunfo	96,1	202,1
El Triunfo	Naranjal	60,9	263
Naranjal	Machala	91,7	354,7

Tabla 4.37. Matriz de distancias ruta Guamote – Machala.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

Punto de carga (origen)	Punto de descarga (destino)	Distancia del punto de carga al punto de descarga (km)	Distancia acumulada (km)
Guamote	Alausí	70	70
Alausí	Chunchi	36	106
Chunchi	El Triunfo	96,1	202,1
El Triunfo	Naranjal	60,9	263
Naranjal	Machala	91,7	354,7
Machala	Santa Rosa	32,7	387,4
Santa Rosa	Huaquillas	45,3	432,7

Tabla 4.38. Matriz de distancias ruta Guamote – Huaquillas.
Fuente: Ministerio de Transporte y Obras Públicas (2022).

4.6 TARIFAS EN EL TRANSPORTE

Bajo el criterio de Anaya (2015), las tarifas en el transporte son el resultado de la fijación de precios que los transportistas negocian por sus servicios, entre las que se tiene: las relacionadas con el volumen, las distancias y la demanda.

4.6.1 Tarifas relacionadas con el volumen

En su mayoría, el costo de servicio de transporte se encuentra relacionado con el tamaño de su carga a enviarse. Las tarifas en general son el reflejo de la economía en este sector, puesto que, si el volumen a transportarse es alto, su costo se ve reducido caso contrario este tiende a elevarse Anaya, J. (2015).

4.6.2 Tarifas relacionadas con las distancias

Tarifas que pueden ser totalmente invariables con la distancia o directamente variables con la misma, entre ellas encontramos:

a. Tarifas uniformes: determina que la tarifa de transporte para todas las distancias de origen a destino son las mismas.

b. Tarifas proporcionales: las tarifas proporcionales consisten en establecer un acuerdo en la tarifa y los costos del servicio.

c. Tarifas graduales: las tarifas graduales mantienen una estructura en función a la distancia; es decir, a mayor recorrido en el envío, los costos fijos y variables se prorratean sobre un mayor trayecto.

d. Tarifas generales: tarifas sencillas que abarca un área extensa en el origen, el destino o ambos Anaya, J. (2015).

4.6.3 Tarifas relacionadas con la demanda

Para un administrador, en el servicio de transporte se presentan dos escenarios: los económicos propios del administrador y los de servicios alternativos de transporte a disposición Anaya, J. (2015).

4.7 SOFTWARE DE APLICACIÓN WINQSB

La aplicación de modelos matemáticos facilita y asegura la confiabilidad de los resultados especialmente cuando estos modelos son altamente probados en software de aplicación. Las nuevas tecnologías y su influencia en los mercados globalizados son eslabones amplios en nuestra economía, una forma de sacarlos provecho, será caminar bajo esta dinámica económica, donde el principal objetivo es el servicio al cliente y su satisfacción. Un ejemplo básico es el software de aplicación e interpretación gerencial WINQSB (*Quantitative Systems for Business* – Sistema Cuantitativo para Negocios) versión 2.0, mantenido por Yih-Long Chang, profesor de gestión de las operaciones de la *Georgia Tech University*, en la ciudad de Atlanta, Georgia.

WINQSB, programa interactivo que facilita la toma de decisiones gerenciales, contiene herramientas versátiles para resolver distintos tipos de problemas en el campo de la investigación de operaciones. El programa comprende diecinueve módulos, uno de ellos destaca en sus aplicabilidades, *Network Modeling* (NET) que incluye apartados específicos para resolver el problema del transbordo, el problema del transporte, el de asignación, el problema del camino más corto, flujo máximo, árbol generador, y problema del agente viajero Carro, R. (2014).

El software contiene los algoritmos de solución de problemas de Investigación de Operaciones y gerencia, mismo que se utilizará como base en la modelación del problema de transporte de carga.

4.8 SIMULACIÓN

En los últimos años, la simulación de procesos ha llegado a ser una herramienta adecuada y oportuna de apoyo para el diseño, caracterización, optimización y monitoreo del funcionamiento de procesos industriales. Para aplicar estas simulaciones existen en la actualidad una gran variedad de simuladores de procesos.

En el ámbito del sector del transporte, los sistemas de movilización se pueden considerar como un proceso crítico para las empresas manufactureras, ya que éstas deben trasladar las materias primas y los productos terminados desde sus orígenes hacia sus destinos. El sistema definitivo se da con la participación de los siguientes modelos:

a. Modelo Conceptual: análisis del desempeño del sistema de transporte que se está utilizando en el traslado de mercancías.

b. Modelo Computacional: el enfoque de mejoramiento del sistema de transporte en el sector de la transportación terrestre de carga.

A partir de la simulación del modelo de transporte se realiza un análisis del estado actual de algunas variables de salida o respuesta del sistema de transporte como:

a. Cantidad de servicios de transporte programados y cantidad obtenida;

b. Tiempo promedio de traslado;

c. Cantidad de productos en cola en centros de acopio;

d. Tiempo promedio en cola en centros de acopio;

e. Capacidad utilizada en el vehículo de carga.

Los resultados obtenidos del modelo de transporte se comparan con los estándares en el mercado de la transportación Martínez, A. (2000).

4.9 PROPUESTA PRÁCTICA

Modelo matemático para optimizar el costo del transporte pesado de carga agrícola, utilizando programación lineal, para la Compañía de transporte pesado interprovincial Jaime Roldós Aguilera Sociedad Anónima.

4.9.1 Modelado Matemático del Sistema de Transporte

La estructura del modelado comprende el cálculo del costo fijo y costo variable para cada una de las rutas objeto de estudio, en el que se muestran los siguientes resultados:

Vehículo de 18 toneladas

COSTOS RUTA RIOBAMBA – GUAYAQUIL	
Costos de Operación	**Importe del costo un vehículo 18 toneladas ($)**
Costos Fijos	
Salario Conductor	112,50
IESS Aporte patronal	12,54
Fondos de reserva	9,37
XIII sueldo	9,38
XIV sueldo	4,69
Vacaciones	4,69
Seguro de Vehículo	22,00
Matrícula Vehículo	2,55
Depreciación	91,86
Amortización	3,65
Viáticos	10,00
Peajes	8,00
Total Costos Fijos	**291,22**
Costos Variables	
Precio del combustible	68,57
Llantas	33,59
Mantenimiento por viaje	36,80
Baterías	2,71
Imprevistos	31,88
Total Costos Variables	**173,55**
COSTO TOTAL IDA Y VUELTA	**464,77**
Número de kilómetros en la ruta	235,10
Costos por kilómetro ($)	**0,99**

Tabla 4.39. Costo por viaje ida y vuelta ruta Riobamba – Guayaquil.

El costo del transporte de productos agrícolas en un vehículo con capacidad de carga de 18 toneladas, en la ruta Riobamba - Guayaquil, con una distancia de 235,1 km (ida) y 235,1 km (vuelta) es de $ 464,77.

COSTOS RUTA RIOBAMBA – MACHALA	
Costos de Operación	**Importe del costo un vehículo 18 toneladas ($)**
Costos Fijos	
Salario Conductor	112,50
IESS Aporte patronal	12,54
Fondos de reserva	9,37
XIII sueldo	9,38
XIV sueldo	4,69
Vacaciones	4,69
Seguro de Vehículo	22,00
Matrícula Vehículo	2,55
Depreciación	91,86
Amortización	3,65
Viáticos	10,00
Peajes	8,00
Total Costos Fijos	**291,22**
Costos Variables	
Precio del combustible	93,10
Llantas	45,60
Mantenimiento por viaje	36,80
Baterías	2,71
Imprevistos	32,08
Total Costos Variables	**210,29**
COSTO TOTAL IDA Y VUELTA	**501,51**
Número de kilómetros en la ruta	319,20
Costos por kilómetro ($)	**0,79**

Tabla 4.40. Costo por viaje ida y vuelta ruta Riobamba – Machala.

El costo del transporte de productos agrícolas en un vehículo con capacidad de carga de 18 toneladas, en la ruta Riobamba - Machala, con una distancia de 319,2 km (ida) y 319,2 km (vuelta) es de $ 501,51.

COSTOS RUTA RIOBAMBA – HUAQUILLAS	
Costos de Operación	**Importe del costo un vehículo 18 toneladas ($)**
Costos Fijos	
Salario Conductor	112,50
IESS Aporte patronal	12,54
Fondos de reserva	9,37
XIII sueldo	9,38
XIV sueldo	4,69
Vacaciones	4,69
Seguro de Vehículo	22,00
Matrícula Vehículo	2,55
Depreciación	91,86
Amortización	3,65
Viáticos	10,00
Peajes	8,00
Total Costos Fijos	**291,22**
Costos Variables	
Precio del combustible	115,85
Llantas	56,74
Mantenimiento por viaje	36,80
Baterías	2,71
Imprevistos	32,26
Total Costos Variables	**244,37**
COSTO TOTAL IDA Y VUELTA	**535,59**
Número de kilómetros en la ruta	397,20
Costos por kilómetro ($)	**0,67**

Tabla 4.41. Costo por viaje ida y vuelta ruta Riobamba – Huaquillas.

El costo del transporte de productos agrícolas en un vehículo con capacidad de carga de 18 toneladas, en la ruta Riobamba - Huaquillas, con una distancia de 397,2 km (ida) y 397,2 km (vuelta) es de $ 535,59.

COSTOS RUTA CAJABAMBA – GUAYAQUIL	
Costos de Operación	**Importe del costo un vehículo 18 toneladas ($)**
Costos Fijos	
Salario Conductor	112,50
IESS Aporte patronal	12,54
Fondos de reserva	9,37
XIII sueldo	9,38
XIV sueldo	4,69
Vacaciones	4,69
Seguro de Vehículo	22,00
Matrícula Vehículo	2,55
Depreciación	91,86
Amortización	3,65
Viáticos	10,00
Peajes	8,00
Total Costos Fijos	**291,22**
Costos Variables	
Precio del combustible	62,83
Llantas	30,77
Mantenimiento por viaje	36,80
Baterías	2,71
Imprevistos	31,83
Total Costos Variables	**164,94**
COSTO TOTAL IDA Y VUELTA	**456,16**
Número de kilómetros en la ruta	215,40
Costos por kilómetro ($)	**1,06**

Tabla 4.42. Costo por viaje ida y vuelta ruta Cajabamba – Guayaquil.

El costo del transporte de productos agrícolas en un vehículo con capacidad de carga de 18 toneladas, en la ruta Cajabamba - Guayaquil, con una distancia de 215,4 km (ida) y 215,4 km (vuelta) es de $ 456,16.

COSTOS RUTA CAJABAMBA – MACHALA	
Costos de Operación	**Importe del costo un vehículo 18 toneladas ($)**
Costos Fijos	
Salario Conductor	112,50
IESS Aporte patronal	12,54
Fondos de reserva	9,37
XIII sueldo	9,38
XIV sueldo	4,69
Vacaciones	4,69
Seguro de Vehículo	22,00
Matrícula Vehículo	2,55
Depreciación	91,86
Amortización	3,65
Viáticos	10,00
Peajes	8,00
Total Costos Fijos	**291,22**
Costos Variables	
Precio del combustible	62,83
Llantas	42,79
Mantenimiento por viaje	36,80
Baterías	2,71
Imprevistos	32,03
Total Costos Variables	**177,16**
COSTO TOTAL IDA Y VUELTA	**468,38**
Número de kilómetros en la ruta	299,50
Costos por kilómetro ($)	**0,78**

Tabla 4.43. Costo por viaje ida y vuelta ruta Cajabamba – Machala.

El costo del transporte de productos agrícolas en un vehículo con capacidad de carga de 18 toneladas, en la ruta Cajabamba - Machala, con una distancia de 299,5 km (ida) y 299,5 km (vuelta) es de $ 468,38.

COSTOS RUTA CAJABAMBA – HUAQUILLAS	
Costos de Operación	**Importe del costo un vehículo 18 toneladas ($)**
Costos Fijos	
Salario Conductor	112,50
IESS Aporte patronal	12,54
Fondos de reserva	9,37
XIII sueldo	9,38
XIV sueldo	4,69
Vacaciones	4,69
Seguro de Vehículo	22,00
Matrícula Vehículo	2,55
Depreciación	91,86
Amortización	3,65
Viáticos	10,00
Peajes	8,00
Total Costos Fijos	**291,22**
Costos Variables	
Precio del combustible	110,10
Llantas	53,93
Mantenimiento por viaje	36,80
Baterías	2,71
Imprevistos	32,22
Total Costos Variables	**235,76**
COSTO TOTAL IDA Y VUELTA	**526,98**
Número de kilómetros en la ruta	377,50
Costos por kilómetro ($)	**0,70**

Tabla 4.44. Costo por viaje ida y vuelta ruta Cajabamba – Huaquillas.

El costo del transporte de productos agrícolas en un vehículo con capacidad de carga de 18 toneladas, en la ruta Cajabamba - Huaquillas, con una distancia de 377,5 km (ida) y 377,5 km (vuelta) es de $ 526,98.

COSTOS RUTA GUAMOTE – GUAYAQUIL	
Costos de Operación	**Importe del costo un vehículo 18 toneladas ($)**
Costos Fijos	
Salario Conductor	112,50
IESS Aporte patronal	12,54
Fondos de reserva	9,37
XIII sueldo	9,38
XIV sueldo	4,69
Vacaciones	4,69
Seguro de Vehículo	22,00
Matrícula Vehículo	2,55
Depreciación	91,86
Amortización	3,65
Viáticos	10,00
Peajes	8,00
Total Costos Fijos	**291,22**
Costos Variables	
Precio del combustible	78,93
Llantas	38,66
Mantenimiento por viaje	36,80
Baterías	2,71
Imprevistos	31,96
Total Costos Variables	**189,06**
COSTO TOTAL IDA Y VUELTA	**480,28**
Número de kilómetros en la ruta	270,60
Costos por kilómetro ($)	**0,89**

Tabla 4.45. Costo por viaje ida y vuelta ruta Guamote – Guayaquil.

El costo del transporte de productos agrícolas en un vehículo con capacidad de carga de 18 toneladas, en la ruta Guamote - Guayaquil, con una distancia de 270,6 km (ida) y 270,6 km (vuelta) es de $ 480,28.

COSTOS RUTA GUAMOTE – MACHALA	
Costos de Operación	**Importe del costo un vehículo 18 toneladas ($)**
Costos Fijos	
Salario Conductor	112,50
IESS Aporte patronal	12,54
Fondos de reserva	9,37
XIII sueldo	9,38
XIV sueldo	4,69
Vacaciones	4,69
Seguro de Vehículo	22,00
Matrícula Vehículo	2,55
Depreciación	91,86
Amortización	3,65
Viáticos	10,00
Peajes	8,00
Total Costos Fijos	**291,22**
Costos Variables	
Precio del combustible	103,45
Llantas	50,67
Mantenimiento por viaje	36,80
Baterías	2,71
Imprevistos	32,16
Total Costos Variables	**225,80**
COSTO TOTAL IDA Y VUELTA	**517,02**
Número de kilómetros en la ruta	354,70
Costos por kilómetro ($)	**0,73**

Tabla 4.46. Costo por viaje ida y vuelta ruta Guamote – Machala.

El costo del transporte de productos agrícolas en un vehículo con capacidad de carga de 18 toneladas, en la ruta Guamote - Machala, con una distancia de 354,7 km (ida) y 354,7 km (vuelta) es de $ 517,02.

COSTOS RUTA GUAMOTE – HUAQUILLAS	
Costos de Operación	**Importe del costo un vehículo 18 toneladas ($)**
Costos Fijos	
Salario Conductor	112,50
IESS Aporte patronal	12,54
Fondos de reserva	9,37
XIII sueldo	9,38
XIV sueldo	4,69
Vacaciones	4,69
Seguro de Vehículo	22,00
Matrícula Vehículo	2,55
Depreciación	91,86
Amortización	3,65
Viáticos	10,00
Peajes	8,00
Total Costos Fijos	**291,22**
Costos Variables	
Precio del combustible	126,20
Llantas	61,81
Mantenimiento por viaje	36,80
Baterías	2,71
Imprevistos	32,35
Total Costos Variables	**259,87**
COSTO TOTAL IDA Y VUELTA	**551,10**
Número de kilómetros en la ruta	432,70
Costos por kilómetro ($)	**0,64**

Tabla 4.47. Costo por viaje ida y vuelta ruta Guamote – Huaquillas.

El costo del transporte de productos agrícolas en un vehículo con capacidad de carga de 18 toneladas, en la ruta Guamote - Huaquillas, con una distancia de 432,7 km (ida) y 432,7 km (vuelta) es de $ 551,10.

4.9.2 Solución Básica para el Costo del Transporte vehículo de 18 toneladas

Para la resolución del costo de transporte, independientemente cual sea el método a aplicar, se requiere de la estructura básica de un problema de programación lineal, misma que involucra la oferta y la demanda, así como los costos respectivos; es decir, la matriz de *Cij* y la Matriz de *Xij*.

	Xij				
	Matriz de cantidades				
	Destinos				
	Guayaquil	Machala	Huaquillas	**Orígenes**	**OFERTA**
	35,64			Riobamba	35,64
	23,76	28,08	15,12	Cajabamba	66,96
			5,4	Guamote	5,4
DEMANDA	59,4	28,08	20,52		108 ton

Tabla 4.48. Matriz de cantidades.
Fuente: Tablas de oferta y demanda de carga.

El ejercicio de costos de transporte parte de una solución básica que se plantea de la siguiente manera:

1. Función Objetivo

Donde las variables de la función objetivo son las siguientes en relación a la fórmula 2.1:

Z_{min}=

C11x11+	C12x12 +	C13x13 +
C21x21+	C22x22 +	C23x23 +
C31x31 +	C32x32 +	C33x33 +

Donde *Cij* representa el costo de transportar las unidades en toneladas desde un origen hacia el destino.

Destinos ($)			Orígenes
Guayaquil	Machala	Huaquillas	
25,82	27,86	29,75	Riobamba
25,34	26,02	29,28	Cajabamba
26,68	28,72	30,62	Guamote

Tabla 4.49. Matriz de costos por tonelada.
Fuente: Tablas de costos calculados (2022).

2. Sujeto a las siguientes restricciones o limitaciones. -

Para formar las restricciones o limitaciones utilizamos como referencia la oferta de los centros de distribución (Riobamba, Cajabamba, Guamote) y la demanda de cada centro de consumo (Guayaquil, Machala, Huaquillas), en base a la fórmula 2.2 y 2.3.

X11 .+X12 .+X13 = 35,64

X21 .+X22 .+X23 = 66,96

X31 .+X32 .+X33 . .= 5,4

X11 .+X21 .+X31 .= 59,4

X12 .+X22 .+X32 .= 28,08

X13 .+X23 .+X33 .= 20,52

No negatividad $X_{ij} \geq 0$

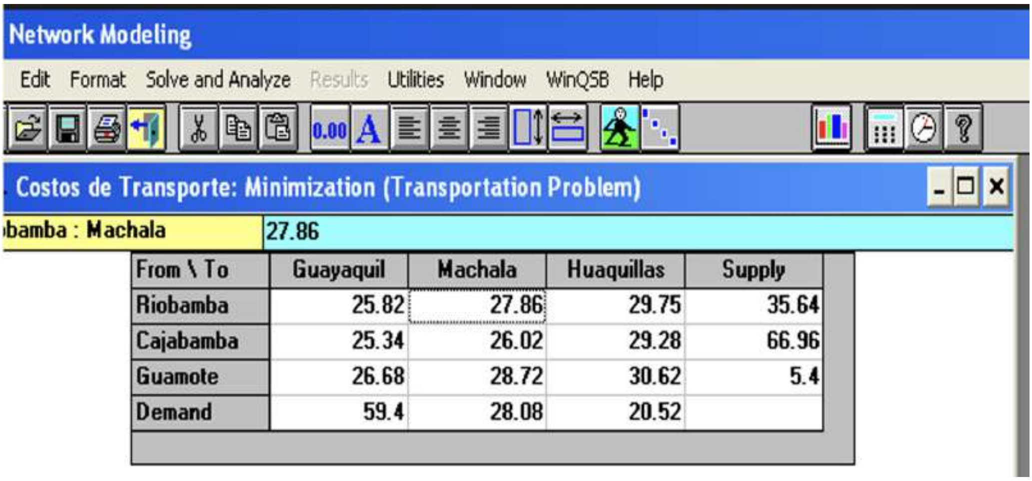
Se obtuvo un sistema de 6 ecuaciones con 18 variables, mismas que constituyeron el insumo para la alimentación de datos en el programa de simulación WINQSB (*Quantitative Systems for Business* – Sistema Cuantitativo para Negocios), y orientar un resultado de costo óptimo bajo los métodos Esquina Noroeste, Costos Mínimos, Vogel y Russel, con la utilización de la herramienta *Network Modeling*.

4.9.3 Validación del Modelo Matemático con WINQSB (Herramienta Network Modeling) vehículo 18 toneladas

Método Esquina Noroeste

Ingreso de datos

Como primer paso definimos dentro del programa el número de filas y el número de columnas que representaran la oferta y la demanda, así como la acción que se debe llevar a cabo en cuanto al cálculo (maximización / minimización), seguidamente se procede al ingreso de las variables correspondientes tanto en costo como en disponibilidad y requerimiento, como se muestra en la figura 4.15.



From \ To	Guayaquil	Machala	Huaquillas	Supply
Riobamba	25.82	27.86	29.75	35.64
Cajabamba	25.34	26.02	29.28	66.96
Guamote	26.68	28.72	30.62	5.4
Demand	59.4	28.08	20.52	

Figura 4.15. Ingreso de datos.
Fuente: WINQSB Network Modeling -Versión 2.0 (2023).

Selección del método a aplicar

Una vez ingresados los datos básicos para el cálculo del costo del transporte, vamos al menú *Solve and Analyze*, seleccionamos *Select Initial Solution Method*, elegimos el método a aplicar, en este caso el Esquina Noreste y pulsamos OK, situación que se observa en la figura 4.16.

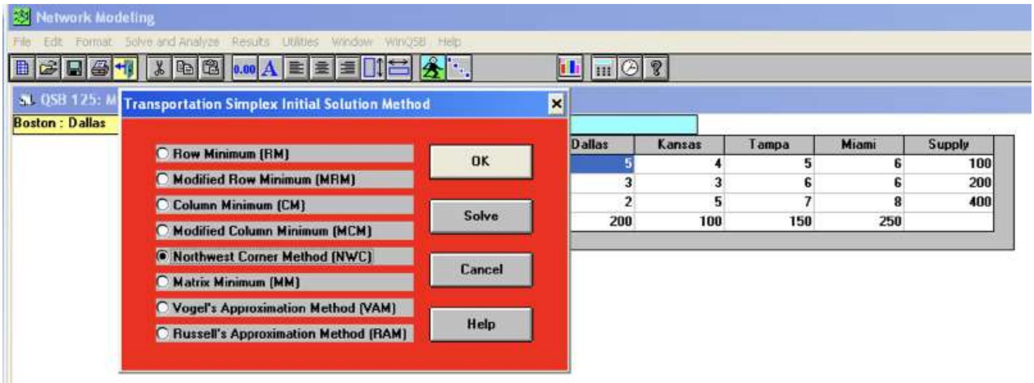


Figura 4.16. Selección del método a aplicar.
Fuente: WINQSB *Network Modeling* -Versión 2.0 (2023).

Resultado del método

Seguidamente se pulsa la opción *Solve and Analyze*, *Solve and Display Steps – Tableau* con el cual se obtiene el resultado como se visualiza en la figura 4.17.

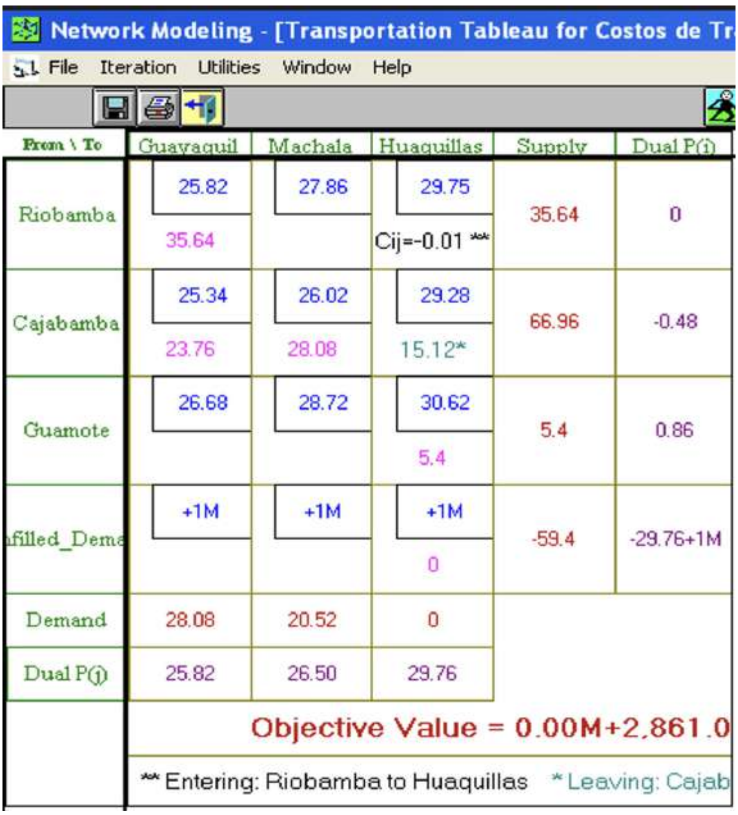


Figura 4.17. Resultado del método esquina noroeste.
Fuente: WINQSB *Network Modeling* -Versión 2.0 (2023).

Desde los tres puntos de origen hacia los tres puntos de destino el costo total mínimo de transportar 108 toneladas por el método Esquina Noroeste bajo la administración del programa WINQSB, herramienta *Network Modeling*, es de $ 2 861,00.

Siguiendo el mismo procedimiento del método Esquina Noreste, se presenta los resultados de aplicación de los métodos Costos Mínimos, Vogel y Russel.

Método de Costos mínimos

Transportation Tableau for Costos de Transporte - Iteration 1

From \ To	Guayaquil	Machala	Huaquillas	Supply	Dual P(i)
Riobamba	25.82	27.86 20.52	29.75 15.12	35.64	0
Cajabamba	25.34 59.4	26.02 7.56	29.28	66.96	-1.84
Guamote	26.68 Cij=-1.37 **	28.72	30.62 5.4*	5.4	0.87
nfilled_Dema	+1M	+1M	+1M 0	-59.4	-29.75+1M
Demand	28.08	20.52	0		
Dual P(j)	27.18	27.86	29.75		
	Objective Value = 0.00M+2,888.7				
	** Entering: Guamote to Guayaquil			* Leaving: Guamot	

Figura 4.18. Resultado del método costos mínimos.
Fuente: WINQSB *Network Modeling* -Versión 2.0 (2023).

Desde los tres puntos de origen hacia los tres puntos de destino el costo total mínimo de transportar 108 toneladas por el método Costos Mínimos bajo la administración del programa WINQSB, herramienta *Network Modeling*, es de $ 2 888,70.

Método de Vogel

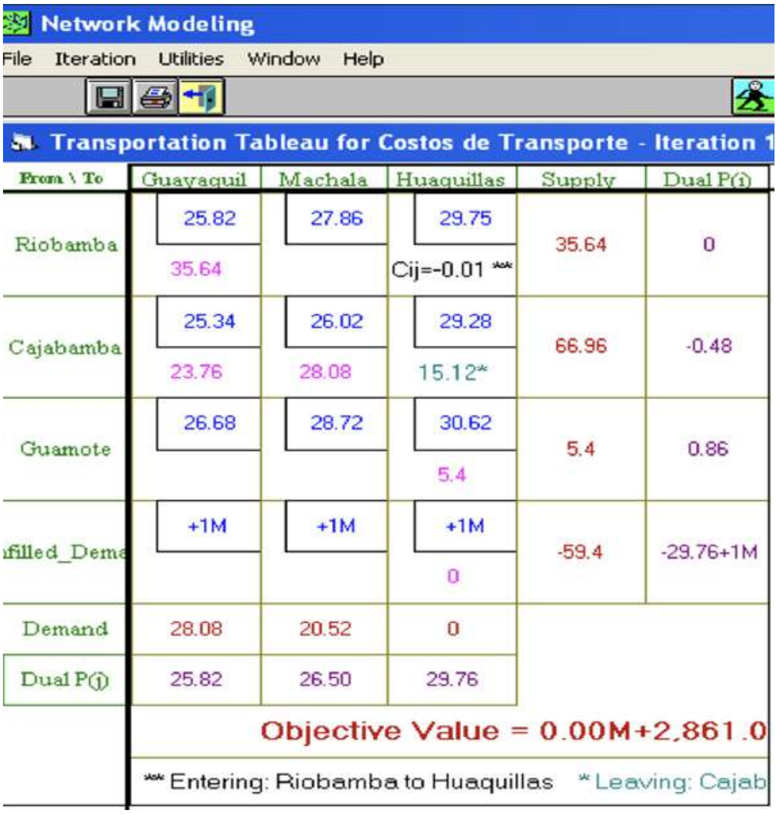


Figura 4.19. Resultado del método Vogel.
Fuente: WINQSB *Network Modeling* -Versión 2.0 (2023).

Desde los tres puntos de origen hacia los tres puntos de destino el costo total mínimo de transportar 108 toneladas por el método Vogel bajo la administración del programa WINQSB, herramienta *Network Modeling*, es de $ 2 861,00.

Método de Russel

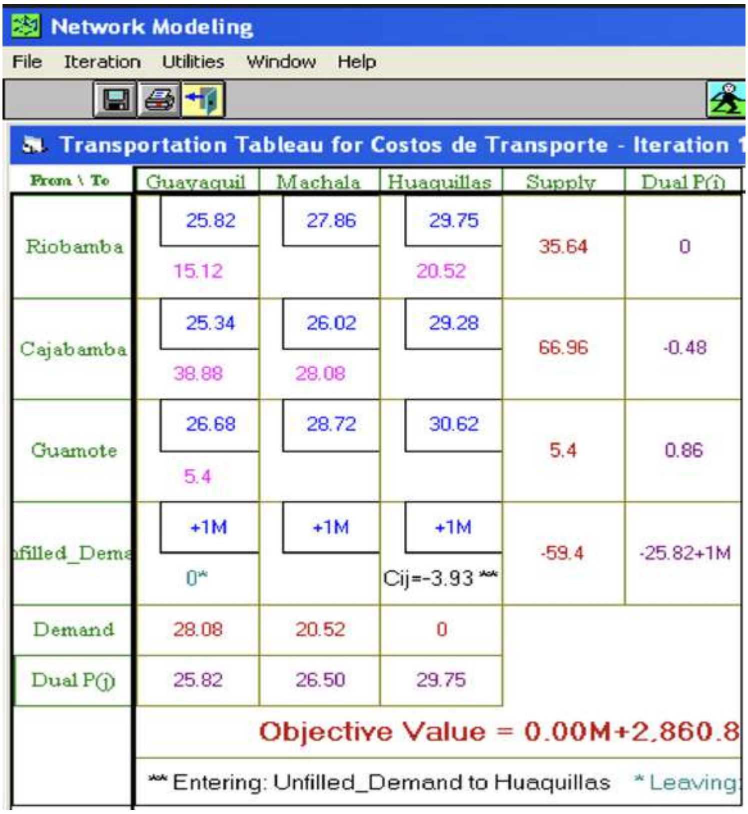


Figura 4.20. Resultado del método Russel.
Fuente: WINQSB *Network Modeling* -Versión 2.0 (2023).

Desde los tres puntos de origen hacia los tres puntos de destino el costo total mínimo de transportar 108 toneladas por el método Russel bajo la administración del programa WINQSB, herramienta *Network Modeling*, es de 2 860,80 dólares.

4.9.4 Interpretación de los resultados

Aplicado los distintos métodos se ha podido observar que un costo total mínimo de traslado de 18 toneladas se logra a través del método de Russel con un valor de 2 860, 80 dólares. Esta cantidad transmite la importancia del costo de traslado de las mercancías en el mercado y habla de decisiones y negociación en cuanto distancia, tamaño de la carga y tiempo de entrega, que se trasforman en nuevos cálculos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, A., Rivas, E., & Salcedo, O. (2019). *Investigación de Operaciones*. Bogotá: Ecoe Ediciones. https://doi.org/https://www.perlego.com/es/book/3784197/investigacin-de-operaciones-pdf
- Agencia Nacional de Tránsito del Ecuador . (2022). *Agencia Nacional de Tránsito del Ecuador* . Obtenido de https://www.ant.gob.ec
- Alzate, P. (2022). *Investigación de Operaciones: Conceptos fundamentales*. Bogotá: Ediciones de la U. Obtenido de https://www.casadellibro.com/libro-investigacion-de-operaciones/9789587627480/13189332
- Anaya, J. (2015). *Logística integral La gestión operativa de la empresa* (Quinta ed.). Madrid: Esic Editorial. Obtenido de https://www.academia.edu/79667385/Log%C3%ADstica_integral_La_gesti%C3%B3n_operativa_de_la_empresa_5ta_edici%C3%B3n_Julio_Anaya
- Aranda, A. (18 de Mayo de 2023). *Costos de transportación de productos*. (P. Cepeda, Entrevistador)
- Aseguradora del Sur. (2023). *aseguradoradelsur.com*. Recuperado el 10 de Marzo de 2023, de aseguradoradelsur.com: https://www.aseguradoradelsur.com.ec/calculadora/#/
- Ballou, R. (2004). *Logística: Administración de la Cadena de Suministro*. Mexico: Pearson Education. Obtenido de https://www.academia.edu/38285109/Logistica_Administracion_de_la_cadena_de_suministro_5ta_Edicion_Ronald_H_Ballou
- Carreño, A. (2018). *Cadena de suminsitro y logística*. Perú: Fondo Editorial PUCP.

- Carro, R. (2014). *Investigación de Operaciones en la Administración*. Argentina: Universidad Nacional de Mar del Plata. Obtenido de https://www.freelibros.net/administracion/investigacion-de-operaciones-en-la-administracion-roberto-carro-paz
- Cepeda, P. (2022). Modelo matemático para optimizar el costo del transporte pesado de carga agrícola, utilizando programación lineal, para la compañía de transporte pesado interprovincial Jaime Roldós Aguilera Sociedad Anónima. Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.
- Collier, D., & Evans, J. (2015). *Administración de Operaciones*. México, D.F.: Cengage Learning. Obtenido de https://issuu.com/cengagelatam/docs/ao5_issuu
- Hernández, L. (2018). *Tecnicas para ahorrar Costos en el Transporte*. Buenos Aires: Alfaomega Grupo Editor.
- Izar, J. (2012). *Investigación de Operaciones*. Mexico: Trillas. Obtenido de https://es.scribd.com/document/401239121/Investigacion-de-Operaciones-Juan-Manuel-Izar-Landeta-pdf#
- Martinez, A. (22 de Junio de 2000). *Simulación de Procesos*. Obtenido de https://www.ecured.cu/Simulaci%C3%B3n_de_Procesos
- Mauleón, M. (2006). *Logística y Costos*. España: Editorial Diaz de Santos. Obtenido de https://books.google.com.ec/books?id=b_Hv10f-UMEC&pg=PA31&hl=es&source=gbs_selected_pages&cad=1#v=onepage&q=local%2C%20regional&f=false
- Ministerio de Trabajo. (16 de Diciembre de 2022). *Ministerio de Trabajo*. Obtenido de https://www.trabajo.gob.ec
- Ministerio de Transporte y Obras Públicas. (14 de Noviembre de 2022). *Ministerio de Transporte y Obras Públicas*. Obtenido de https://www.obraspublicas.gob.ec
- Salazar, B. (11 de Junio de 2019). *Ingeniería Industrial*. Obtenido de https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/metodo-del-costo-minimo/

- Sallán, J., Suñé, A., Fernández, V., & Fonollosa, J. (2005). *Métodos cuantitativos de organización industrial I*. Barcelona: Ediciones de la Universidad Politécnica de Cutalunya. Obtenido de https://books.google.com.ec/books?id=s9Br9dX6ekcC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q=transporte&f=false

- Sistema Nacional de Información . (20 de Julio de 2022). *Sistema Nacional de Información*. Obtenido de https://sni.gob.ec

- Taha, H. (2017). *Investigación de Operaciones* (10ma Edición ed.). Mexico: Pearson Educacion. Obtenido de https://www.elsotano.com/libro/investigacion-de-operaciones-10-ed_10514012

- Valencia, E. (2018). *Investigación Operativa Programación Lineal, problemas resueltos con soluciones detalladas*. Ambato: MEGAGRAF. Obtenido de https://docplayer.es/188272945-Investigacion-operativa-programacion-lineal-problemas-resueltos-con-soluciones-detalladas.html

- WINQSB Network Modeling (Versión 2.0). (28 de Julio de 2023). Obtenido de https://winqsb.uptodown.com/windows

- Winston, W. (2006). *Investigación de Operaciones: Aplicaciones y Algoritmos*. México: International Thomson Editores S.A. Obtenido de https://www.academia.edu/28247643/Wayne_L_Winston_Investigacion_de_operaciones_Aplicaciones_y_algoritmos

La investigación operativa emerge como una herramienta esencial en el ámbito empresarial, tiene un papel crucial en la mejora de la eficiencia y la toma de decisiones estratégicas. En este contexto, el Capítulo I del presente texto establece los fundamentos fundamentales de esta disciplina, resaltando la necesidad de encontrar soluciones efectivas a los desafíos empresariales mediante un enfoque analítico y sistemático. El Capítulo II se sumerge en la programación lineal, una técnica poderosa que permite optimizar la asignación de recursos limitados. En el tercer capítulo, se destaca la importancia de los pronósticos en la toma de decisiones empresariales. Se aborda la relevancia tanto de los enfoques cualitativos como cuantitativos en la predicción de tendencias y eventos futuros. El cuarto y último capítulo se aborda el problema del transporte, sus diversas variaciones y enfoques para minimizar costos y mejorar la eficiencia logística. En conjunto, este texto proporciona una visión integral de la investigación operativa y sus aplicaciones clave en la gestión empresarial.

Juan Alberto Ávalos Reyes es un profesional con formación en Administración de Empresas, Finanzas y Economía Empresarial, con experiencia destacada como gerente de SERACOMP y presidente de Avalos Consultores. También ha ejercido roles académicos en la ESPOCH, destacándose por su compromiso con la excelencia académica y el desarrollo estudiantil. Su enfoque en Investigación Operativa y ética gerencial ha sido fundamental para liderar equipos y promover valores en la gestión financiera, consolidándolo como un profesional versátil comprometido con la formación de futuros líderes en administración y finanzas.

Patricia Mercedes Cepeda Silva es una profesional con formación en Finanzas y Matemáticas, destacando por su compromiso con la excelencia académica y habilidades técnicas sólidas. Ha ocupado roles clave en el área administrativa y ha demostrado habilidades analíticas avanzadas, así como la capacidad para trabajar en equipo en entornos dinámicos. Su enfoque proactivo y habilidades en docencia y modelación matemática la han destacado como una profesional integral, capaz de abordar desafíos complejos y transmitir conocimientos efectivamente.

ISBN: 978-9942-45-154-5